UGA Mat406 2025

Examen du 26 juin, 15h-17h.

*Documents interdits à l'exception d'une feuille manuscrite A4 recto-verso. Calculatrice autorisée.*
*Téléphones portables, ordinateurs, ... interdits.*
*On pourra justifier le résultat de tout calcul fait à la calculatrice en indiquant sur la copie la commande utilisée.*
*Barême indicatif non contractuel : 8, 4, 8.*

# 1 Point fixe et Newton

Soit $P$ le polynôme défini par :

$$P(x) = x^5 + x - 3$$

1. Montrer que $P$ admet une racine réelle unique $r$.
2. Rappeler la suite itérative de la méthode de Newton appliquée à $P$.
3. Donner une valeur $u_0$ initiale pour laquelle on peut assurer que la méthode de Newton converge vers $r$.
4. Déterminer une valeur approché de $u_4$.
5. Déterminer en la justifiant une majoration de $|u_4 - r|$.
6. Discuter la précision du calcul approché de $P(u_4)$ en supposant que les nombres approchés sont représentés avec une précision de 15 décimales.
7. On réécrit l'équation $P(x) = 0$ sous la forme $f(x) = x$ avec

$$f(x) = 3 - x^5$$

   Peut-on appliquer la méthode du point fixe à $f$ pour trouver une valeur approchée de $r$ ? Si oui, le faire et donner une majoration de l'erreur, si non, le justifier.

# 2 Intégration approchée

Déterminer une valeur approchée de

$$\int_0^1 \sin(x^3)\, dx$$

en appliquant la méthode du point milieu avec $N = 10$ subdivisions. Donner et justifier une majoration de l'erreur commise.

# 3 Série entière

On pose

$$F(x) = \int_0^x \sin(t^3)\, dt$$

1. Donner le développement en séries entières de $\sin(t^3)$ en $t = 0$ et son rayon de convergence.
2. En déduire $S(x)$ le développement en séries de $F(x)$ en $x = 0$. On notera $S_N(x)$ la somme des $N$ premiers termes non nuls de $S(x)$.
3. Montrer que $S(1)$ est une série alternée, en déduire une majoration de l'erreur si on approche $F(1)$ par $S_N(1)$ la somme des $N$ premiers termes du de $S(1)$.
4. On veut approcher $F(2)$ par $S(2)$. À partir de quel ordre, la série donnée par $S(2)$ est-elle alternée ? En déduire une majoration de l'erreur si on approche $F(2)$ par $S_N(2)$ la somme des $N$ premiers termes du de $S(2)$.
5. Déterminer $N$ tel que l'erreur soit inférieure à `1e-2`
6. Déterminer $S_N(2)$
7. Discuter la précision de $S_N(2)$ (indication, comparer la valeur de $|S_N(2)|$ et celle du plus grand terme en valeur absolue de la somme définissant $S_N(2)$)