Noyau d'une application linéaire $\phi : V \to W$, $V, W$ $\begin{matrix}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{matrix}$-ev

On note $\ker(\phi) = \{\vec{v} \in V$ tels que $\phi(\vec{v}) = \vec{0}\}$

<u>Prop</u> $\ker(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de $V$

<u>Dém</u> • $\vec{0} \in \ker(\phi)$

$$\phi(\vec{0}) = \phi(0\cdot\vec{0}) = 0\cdot\phi(\vec{0}) = \vec{0}$$

• Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \ker(\phi)$

$\phi(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = \phi(\vec{v}_1)+\phi(\vec{v}_2)$ car $\phi$ linéaire

$= \vec{0} + \vec{0}$ car $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \ker(\phi)$

$= \vec{0}$ et $\vec{v}_1+\vec{v}_2 \in \ker(\phi)$

• Si $\lambda \in \begin{matrix}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{matrix}$, $\vec{v} \in \ker(\phi)$

$\phi(\lambda\vec{v}) = \lambda\,\phi(\vec{v})$ $\phi$ lin

$= \lambda\cdot\vec{0}$ $\vec{v} \in \ker(\phi)$

$= \vec{0}$ donc $\lambda\vec{v} \in \ker(\phi)$

<u>Exemples</u> 1

$$\phi\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x+2y+z\\3x-z\end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x+2y+z=0\\3x-z=0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\3&0&-1\end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2-3L_1$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-6&-\cancel{2}\,4\end{pmatrix} \qquad +3y=z$$

$$x+2y+3y=0 \qquad x=\cancel{y}\,-5y$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cancel{y}\,-5y\\y\\+3y\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}\cancel{1}\,-5\\1\\\cancel{3}\,3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$6y + 4z = 0$$

$$z = -\frac{6y}{4} = -\frac{3y}{2}$$

$$x + 2y - \frac{3y}{2} = 0$$

$$x + \frac{y}{2} = 0 \qquad x = -\frac{y}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y/2 \\ y \\ -3y/2 \end{pmatrix} = \frac{y}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \left\{ y/2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

**Exemple 3**

$$\phi : M \to {}^tM$$

$$\phi(M) = 0 = {}^tM$$

donc $M = 0$

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \{\vec{0}\}$$

**Exemple 4**

$$\phi(f) = 3f'$$

$f \in \mathrm{Ker}(\phi)$ si $3f' = 0$

$f' = 0$ donc $f$ est une fonction constante

$f = C \cdot \underbrace{1}$ fonction : $t \to 1$

$\mathrm{Ker}(\phi) = \{$fonctions constantes$\}$

$= \mathrm{Vect}(1)$

↳ fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \to 1$