Exemple

$V = \{$ensemble des fonctions 2 fois continûment dérivable

$f'' + 4f = 0\}$ $\mathbb{C}$-ev

$\mathcal{B}_1$ $r^2 + 4 = 0$ $r_\pm = \pm 2i$

$\{t \to e^{2it}, t \to e^{-2it}\}$

(abus de notation $\{e^{2it}, e^{-2it}\}$)

$\mathcal{B}_2 \{\cos(2t), \sin(2t)\}$

matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{B}_2 & \cos(2t) & \sin(2t) & \\ P = & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} & & \begin{array}{c} e^{2it} \\ e^{-2it} \end{array} \\ & & & \mathcal{B}_1 \end{array}$$

$$\cos(2t) = \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2}$$

$$\sin(2t) = \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i}$$

$f \in V$ par ex.

$$f = \cos(2t) + 3\sin(2t)$$

coord. dans $\mathcal{B}_1$

$$f = \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} + \frac{3}{2i}(e^{2it} - e^{-2it})$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2i}\right)e^{2it} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2i}\right)e^{-2it}$$

$$f_{\mathcal{B}_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2i} \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2i} \end{pmatrix}$$

coord dans $\mathcal{B}_2$ de $f = \cos(2t) + 3\sin(2t)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2i} \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2i} \end{pmatrix}$$

$P \cdot$ coord ds $\mathcal{B}_2$ = coord ds $\mathcal{B}_1$

**Prop** Un sous-espace vectoriel $W$ d'un espace vectoriel $V$ de dimension finie $n$ est de dimension finie $m$
et on a $m \leq n$
$V = W$ si et seulement si $m = n$

Si on a une famille libre dans $W$ c'est aussi une famille libre de $V$
donc $m \leq n$.
Si $W$ a une base de $n$ éléments ($n = \dim(V)$), si $\vec{v} \in V$ n'est pas dans $W$, $\vec{v}' \notin \mathrm{Vect}(\text{Base de } W)$
on pourrait créer une famille libre de $V$ qui aurait $n+1$ éléments Absurde donc $\vec{v} \in W$

"Généralisation" de la notion de base avec somme directe de sous-espaces vectoriels
$W_1, W_2$ 2 sous-espaces d'un même espace $V$
$$W_1 + W_2 = \{\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \mid \vec{w}_1 \in W_1, \vec{w}_2 \in W_2\}$$

On dit qu'on a une somme directe et on note $W_1 \oplus W_2$
si $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$
La décomposition d'un vecteur $\underset{W_1 \oplus W_2}{\underset{\cap}{\vec{w}}} = \underset{W_1}{\underset{\cap}{\vec{w}_1}} + \underset{W_2}{\underset{\cap}{\vec{w}_2}}$
est alors unique

Généralisation à plusieurs sous-espaces
$W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$
si les sous-espaces sont d'intersection $\{\vec{0}\}$
$(W_j \cap W_{j'} = \{\vec{0}\}$ si $j \neq j')$

$\vec{w} \in W_1 \oplus \dots \oplus W_k$

se décompose de manière unique en

$$\vec{w} = \underset{\underset{W_1}{\cap}}{\vec{w}_1} + \dots + \underset{\underset{W_k}{\cap}}{\vec{w}_k}$$

<u>Prop</u> on obtient une base de $W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ en faisant la réunion de bases de $W_1, \dots, W_k$

<u>Exemples</u> $W_1$ = espace propre / $\lambda_1$

$\vdots$

$W_k$ / $\lambda_k$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ valeurs propres d'une matri