Prop Si V est un espace vectoriel de dimension n une famille libre de n éléments de V est une base de V

Dém $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ famille libre de V, $\vec{v} \in V$

$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}\}$ a $(n+1)$ éléments dans un espace de dim n donc elle n'est pas libre

$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n + \lambda \vec{v} = \vec{0}$

avec les λ non tous nuls.

$\lambda \neq 0$ car sinon on aurait

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

avec des λ_j non tous nuls

Absurde car $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ libre.

$$\vec{v} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\vec{v}_1 + \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda}\vec{v}_n$$

$\vec{v} \in \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$

Donc $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = V$ CQFD

Exemple $\mathbb{R}_n[X]$

Famille $\{1, 1+X, \dots, 1+X+\dots+X^n\}$

$\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$

car $\{1, X, \dots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant $n+1$ éléments

$\{1, 1+X, \dots, 1+X+\dots+X^n\}$ possède $n+1$ éléments

Il suffit de montrer qu'elle est libre

Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_0 1 + \lambda_1 (1+X) + \dots + \lambda_n (1+X+\dots+X^n) = 0$$

terme de degré n : $\lambda_n X^n = 0$

$$\Rightarrow \lambda_n = 0$$

$$\lambda_0 1 + \dots + \lambda_{n-1}(1+X+\dots+X^{n-1}) = 0$$

terme de degré $n-1 \Rightarrow \lambda_{n-1} = 0$

$\Rightarrow \dots$

$\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$ CQFD

Il existe des espaces vectoriels qui ne sont pas de dim. finie.

Exemple $\mathbb{R}[X]$ n'admet pas de famille génératrice ayant un nombre fini d'éléments

Sinon $\{P_1, \ldots, P_n\}$ une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$

d = + grand degré parmi $\deg(P_1), \ldots, \deg(P_n)$

$X^{d+1} \notin \mathrm{Vect}(P_1, \ldots, P_n)$

Les fonctions 2π-périodiques

Le but des séries de Fourier c'est de remplacer une base en dimension finie par une "généralisation" qui est une base ayant un nombre infini d'éléments

$\{1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \ldots, \cos(nt), \sin(nt), \ldots\}$

Pourquoi vouloir des bases ?

Pour transformer les pb d'algèbre linéaire en résolution de systèmes linéaires en utilisant les coordonnées (ou composantes) des vecteurs dans cette base.

Prop Si $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ est une base de V, espace vectoriel, tout vecteur $\vec{v} \in V$ s'écrit de manière unique

$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (V $\mathbb{R}$-ev) ou $\mathbb{C}$ (V $\mathbb{C}$-ev)

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ s'appelle coordonnées (ou composantes) de $\vec{v}$ dans la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_n\}$

⚠ Ne pas confondre $\vec{v}$ et ses coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

Les coordonnées dépendent de $\vec{v}$ mais aussi de la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_n\}$

Exemple 1 $\mathbb{R}^2$

base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ici $\vec{v}$ est égal à ses coord.

base $\Big\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}\Big\}$

Coordonnées de $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$

$\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu & (1) \\ y = \lambda - \mu & (2) \end{cases}$$

$\frac{(1)+(2)}{2}$ $\quad \lambda = \frac{x+y}{2}$

$\frac{(1)-(2)}{2}$ $\quad \mu = \frac{x-y}{2}$

Coordonnées de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ sont $\begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}$

Si on a deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ d'un espace vectoriel V, peut-on trouver les coordonnées d'un vecteur $\vec{v} \in V$ dans $\mathcal{B}_2$ connaissant les coordonnées de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}_1$?

Pour cela, il faut connaître les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}_2$ dans la base $\mathcal{B}_1$

Def matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$: on met en colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}_2$ dans la base $\mathcal{B}_1$

$$\underbrace{\mathcal{B}_1}_{}\;\; \mathcal{B}_2$$

$$P = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} f_1 & \cdots & f_n \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc} & \boxed{} & \\ & & \\ & f_j & \end{array} \right) & \left.\begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}\right\} \mathcal{B}_1 \end{array}$$

Ex. précédent $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathcal{B}_1$ base canonique

$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\mathcal{B}_2$

$$P = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} f_1 & f_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

Résultat si $\vec{v}$ a pour coordonnées V_1 dans $\mathcal{B}_1$ et V_2 dans $\mathcal{B}_2$ (V_1 et V_2 vecteurs colonnes)

$$P V_2 = V_1$$

Si on prend par ex $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1^er^ vecteur de la base $\mathcal{B}_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$