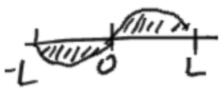
Que se passe-t-il si f est paire ou impaire ?

Par exemple si f est paire

$$b_k(f)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\underbrace{f(t)}\ \underbrace{\sin(k\omega t)}\,dt$$

$\underbrace{\text{paire}\times\text{impaire}}_{\text{impaire}}$

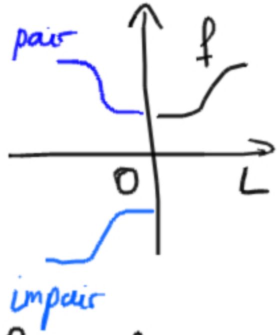


$= 0$

Donc la série de Fourier de f ne contient que la fonction constante et des cosinus c'est une série en cosinus.

De même, si f est impaire $a_k(f)=0$ on a une série en sinus.

→ Si f est une fonction définie sur $[0, L]$ (au lieu de $[-L, L]$) on peut la développer en série de sinus ou en série de cosinus



Pour cela on prolonge f en une fonction impaire ou paire et on calcule sa série de Fourier qui ne contiendra que des sinus ou que des cosinus

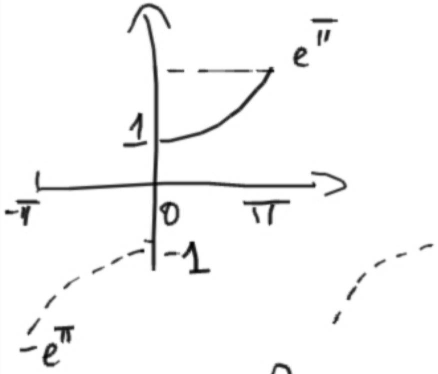
En appliquant le théorème de Dirichlet, si f est C^1 par morceaux sur $[0, L]$ alors f sera égale à sa série en sinus ou en cosinus en tout point où f est continue.

<u>Exemple</u> $f(t)=e^t$ sur $[0,\pi]$

calcul de sa série en sinus

On prolonge f comme fonction impaire $f(t) = -e^{-t}$ sur $[-\pi, 0]$

$= -f(-t)$



$a_0, a_k = 0$

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(t)}_{\text{impair}} \underbrace{\sin(k\omega t)}_{\text{impair}}\, dt$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin(k\omega t)\,dt$$

Ici

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^t \sin(kt)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{Im}(e^t e^{ikt})\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\int_0^\pi e^{(1+ik)t}\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(1+ik)t}}{1+ik}\right]_0^\pi\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\left(\frac{e^\pi e^{ik\pi}-1}{1+ik}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\,\frac{e^\pi(-1)^k-1}{1+ik}$$

$$= \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\,\frac{(e^\pi(-1)^k-1)(1-ik)}{1+k^2}$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}(-k)\,\frac{e^\pi(-1)^k-1}{1+k^2}$$

$$e^t = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt$$

en tout point où f prolongée est continue

donc sauf en 0 et π

Généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

$\mathbb{R}$ $\langle x|x\rangle = x^2$

$\mathbb{C}$ x^2 n'est pas positif

car $i^2 = -1$

$|x|^2$ à la place de x^2

$= \bar{x}\,x$

Produit scalaire sur espaces vectoriels complexes → conjugué

$$\int f^2(t)\,dt \to \int \bar{f}(t) f(t)\,dt$$

$$\langle f,g\rangle = \int \bar{f}(t)\, g(t)\,dt$$

base ⊥ $\mathbb{1}$, $\cos_k$, $\sin_k$

↓

base ⊥ $e^{ik\omega t}$

$$\sum_k \underbrace{\langle e^{ik\omega t}|g\rangle}_{\int \overline{e^{ik\omega t}}\, g(t)\,dt = \int e^{-ik\omega t}\, g(t)\,dt} e^{ik\omega t}$$