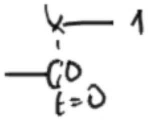
$a_0 = \frac{1}{2}$ $\quad a_k = 0$ $\quad b_k = \frac{1-(-1)^k}{k\pi}$

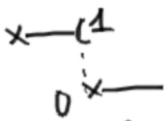
en $t=0$ $\quad S(f) = \frac{1}{2} + \sum 0 \cos k\times 0 + \sum b_k \sin k\times 0$

$$= \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\lim_{t\to 0^-} f(t)}_{=0} + \underbrace{\lim_{t\to 0^+} f(t)}_{=1}\Big)$$



en $t=\pi$

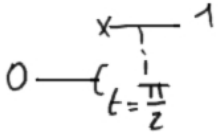


$\frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$

en $t=\pi$ $\quad S(f) = \frac{1}{2} + \sum 0 \cos k\pi + \sum b_k \underbrace{\sin k\pi}_{0}$

$$= \frac{1}{2}$$

en $t=\frac{\pi}{2}$



la fonction est continue et vaut 1

$$1 = S(f)\left(t=\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k\pi} \sin\frac{k\pi}{2}$$

si k est pair $\sin\frac{k\pi}{2} = 0$

k est impair $k = 2\ell+1$

$$\sin\frac{k\pi}{2} = (-1)^\ell$$

$$1-(-1)^k = 2$$

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2(-1)^\ell}{2\ell+1}$$

Remarque vérification approchée pour s'assurer qu'on n'a pas fait d'erreur de calcul

$\frac{\pi}{2} \simeq 1.57$

$$\sum_{\ell=0}^{10} \frac{2(-1)^\ell}{2\ell+1} = 2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \dots + \frac{2}{21}$$

$$\simeq 1.61$$

```
> 2-2/3+2/5-2/7+2/9-2/1
1.52920138296
```

$\simeq 1.53$

1.57 à peu près au milieu

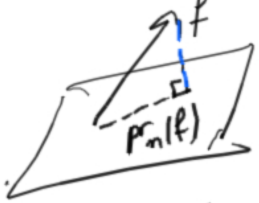
Remarque Dirichlet reste vrai si f est à valeurs complexes (on prend souvent la série de Fourier exponentielle $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}$)

Théorème de Parseval

Hyp f est continue par morceaux sur $[-L,L]$ et à valeurs réelles

Alors $\|f - pr_n(f)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

La norme de $f - pr_n(f)$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$



Pythagore $\|f\|^2 = \|pr_n(f)\|^2 + \|f - pr_n(f)\|^2$

$$\|pr_n(f)\|^2 \leq \|f\|^2$$

Si les hypothèses de Parseval sont vérifiées alors à la limite l'inégalité devient une égalité

Egalité de Parseval

Si f est continue par morceaux sur $[-L,L]$ alors

$$\|f\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \|pr_n(f)\|^2$$

$$\|f\|^2 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(t)\,dt$$

$$= 2a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

Autre façon équivalente de l'énoncer

moyenne de f^2 sur $[-L,L]$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f^2(t)\,dt$$

= "énergie de f"

= "énergie de sa série de Fourier $a_0 + \sum a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t$"

$$= a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

Exemple $f(t) = t$ sur $[-\pi, \pi]$

$a_0 = a_k = 0 \qquad b_k = \frac{-2(-1)^k}{k}$

continue par morceaux

moyenne de f sur $[-\pi,\pi]$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\pi}\,\cancel{2}\,\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}$$

$$\frac{\pi^2}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Vérif $\frac{\pi^2}{6} \simeq 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{100}$

Exemple 2

$f(t) = 0$ sur $[-\pi, 0]$ et 1 sur $[0, \pi]$

continue par morceaux

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\cancel{-\pi}\ 0}^{\pi} 1^2 \, dt = \frac{1}{2}$$

$$= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

$a_k = 0 \quad a_0 = \frac{1}{2}$

$$b_k = \frac{1 - (-1)^k}{k\pi}$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^k}{k\pi}\right)^2$$

si k est pair $\frac{1 - (-1)^k}{k\pi} = 0$

donc $k = 2\ell + 1$, $\ell \geq 0$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{2}{(2\ell+1)\pi}\right)^2$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

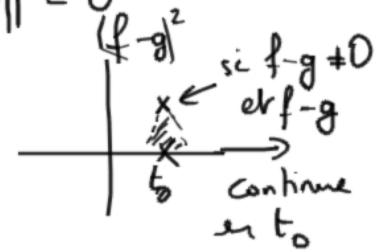
Conséquence du théorème de Parseval : si 2 fonctions f et g ont les mêmes coefficients de Fourier et sont continues par morceaux alors f et g coïncident là où elles sont continues

En effet $f - g$ cont. par morceaux

$$\|f - g\|^2 = 2 a_0(f-g)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f-g)^2 + b_k(f-g)^2$$

$$a_0(f-g) = a_k(f-g) = b_k(f-g) = 0$$

$$\|f - g\|^2 = 0$$



alors on a une petite bosse d'aire non nulle pour le graphe de $(f-g)^2$ $\Rightarrow$ absurde.