Séries de Fourier

approximant de Fourier

$$S_N(f) = \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t) + a_0$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt$$

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos k\omega t\,dt$$

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin k\omega t\,dt$$

$$S_N = \sum_{k=-N}^{N} c_k\, e^{ik\omega t}$$

avec $c_k = \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(t)\, e^{-ik\omega t}\,dt$

on a $c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k)$ $k>0$

$c_0 = a_0$

$S_N(f)$ c'est la projection de f sur $\mathrm{Vect}(\mathbb{1}, \cos_k, k=1..m, \sin_k, k=1..m)$

Que se passe-t-il quand $N \to +\infty$

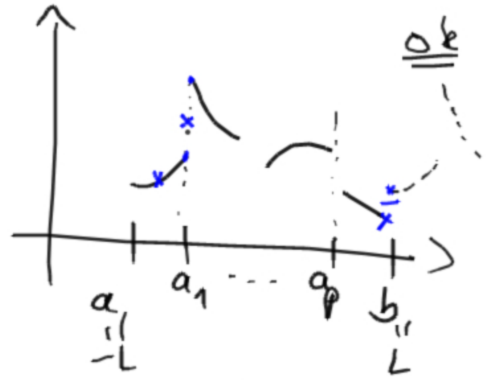
Définition fonction continue ou C^1 par morceaux

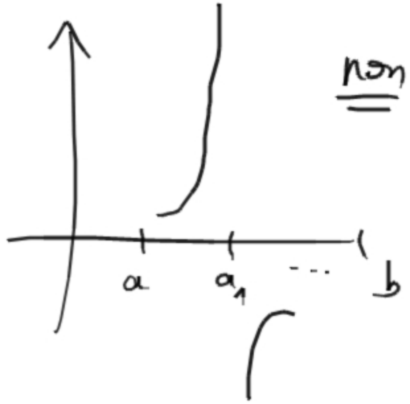
sur un intervalle borné $[a,b]$

(ici $a=-L$, $b=L$)

Admet un nombre fini p de sauts en des points $a_1, \dots, a_p \in [a,b]$

Sur $]a, a_1[$, $]a_1, a_2[$, $\dots$, $]a_p, b[$ on suppose que la fonction f est continue [resp continument dérivable] avec des limites finies en a, $a_1, \dots, a_p, b$ pour f [resp pour f et f']





2 Théorèmes de convergence

Théorème de Dirichlet

Hypothèses La fonction f est C^1 par morceaux sur $[-L, L]$ à valeurs réelles

Alors la série de Fourier de f est convergente en tout point $t \in [-L, L]$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t \Longrightarrow f(t)$$

si f est continue au point t

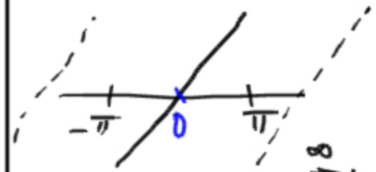
Si on est en un point de discontinuité de f alors

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to t^-} f(x) + \lim_{x \to t^+} f(x)\right)$$

Exemples $f(t) = t$ sur $[-\pi, \pi]$

$a_k = 0$ $\quad b_k = \dfrac{-2(-1)^k}{k}$ $\quad C^1$ par morceaux



$t=0$ $\quad f(0) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt)$

en $t = \pi$

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \pi$$

$$\lim_{x \to \pi^+} f(x) = -\pi \text{ (prolonge par périodicité)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to \pi^-} + \lim_{x \to \pi^+}\right)$$

$$0 = \frac{1}{2}(\pi - \pi) = 0$$

$t = \frac{\pi}{2}$ $\quad f(t) = \frac{\pi}{2}$ $\quad f$ est continue en $\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

si k est pair $\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = 0$

k impair $k = 2\ell+1$ $\ell \in \mathbb{N}$ $\ell \geq 0$

$$\sin\left((2\ell+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\ell\right)$$

$$= (-1)^\ell \sin\frac{\pi}{2} = (-1)^\ell$$

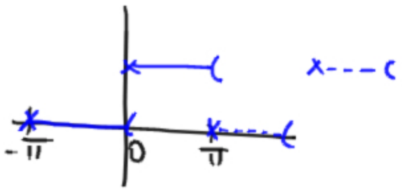
$$b_{2\ell+1} = \frac{-2(-1)^{2\ell+1}}{2\ell+1} = \frac{2}{2\ell+1}$$

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2}{2\ell+1}(-1)^\ell}$$

Remarque le théorème de Dirichlet nous donne la convergence de la série.

Ici la série n'est pas à terme positif, et elle n'est **pas** absolument convergente puisque $\frac{2}{2\ell+1} \sim \frac{1}{\ell}$ et $\sum_{\ell} \frac{1}{\ell}$ diverge (critère de Riemann).

Exemple 2 fonction échelon C^1 par morceaux



$a_0 = \frac{1}{2}$ $\quad a_k = 0 \quad$ $b_k = \frac{1-(-1)^k}{k\pi}$

en $t = 0$ $\quad a_0 + \sum a_k \cos kt + b_k \sin kt$