Déf Approximant de Fourier d'ordre n pour une fonction f continue par morceaux sur $[-L,L]$

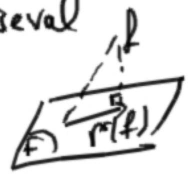
$$\pi_n(f) = a_0(f) + a_1(f)\cos \omega t + b_1(f)\sin \omega t + \dots + a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)$$

$$a_0(f) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt$$ (moyenne de f)

$$a_n(f) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$b_n(f) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

<u>Inégalité de Parseval</u>



$$\|p^n(f)\|^2 \le \|f\|^2$$

$$\| a_0(f)\mathbb{1}\|^2 + \|a_1(f)\cos_1\|^2 + \|b_1(f)\sin_1\|^2 + \dots + \|a_n(f)\cos_n\|^2 + \|b_n(f)\sin_n\|^2$$

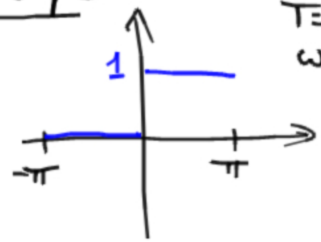
$$= a_0(f)^2\, 2 + a_1(f)^2 + b_1(f)^2 + \dots + a_n(f)^2 + b_n(f)^2$$

$$\le \|f\|^2 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(t)\,dt$$

$$a_0(f)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k(f)^2 + b_k(f)^2 \le \underbrace{\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f^2(t)\,dt}_{\text{moyenne de } f^2 \text{ sur } [-L,L]}$$

<u>Exemple</u>

$L = \pi$
$T = 2\pi$
$\omega = 1$



$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} dt = \frac{1}{2}$$

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi} = 0$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(kt)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos(k\pi)+1}{k}\right)$$

$$\cos(k\pi) = (-1)^k$$

$$b_k(f) = \frac{1}{k\pi}\left(+1-(-1)^k\right)$$

Approximat de Fourier pour fonction échelon

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right)\sin(kt)$$

Seuls les termes pour k impair sont non nuls

Inégalité de Parseval

$$2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2\pi^2}\left(1-(-1)^k\right)^2$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt}_{\pi} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2\pi^2}\left(1-(-1)^k\right)^2 \leq 1 - 2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Déf $a_0(f), a_n(f), b_n(f)$ sont les coefficients de Fourier trigonométriques de f

Coefficients de Fourier complexes de f exponentiels

$$pr_n(f)(t) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(k\omega t) + b_k(f)\sin(k\omega t)$$

$$\cos(k\omega t) = \frac{e^{ik\omega t}+e^{-ik\omega t}}{2}$$

$$\sin(k\omega t) = \frac{e^{ik\omega t}-e^{-ik\omega t}}{2i}$$

$$pr_n(f)(t) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k\frac{e^{ik\omega t}+e^{-ik\omega t}}{2} + \sum_{k=1}^{n} b_k\frac{e^{ik\omega t}-e^{-ik\omega t}}{2i}$$

$$= a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} e^{ik\omega t}\left(\frac{a_k}{2}+\frac{b_k}{2i}\right) + \sum_{k=1}^{n} e^{-ik\omega t}\left(\frac{a_k}{2}-\frac{b_k}{2i}\right)$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k)$$
$k>0$
$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + i b_k)$$

$pr(f)(t)$
$$= a_0(f) + \sum_{k=1}^{m} c_k e^{ik\omega t} + \sum_{k=1}^{m} c_{-k} e^{-ik\omega t}$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k)$$
$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)(\cos k\omega t - i \sin k\omega t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\, e^{-ik\omega t}\,dt$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)(\cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t))\,dt$$
$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\, e^{ik\omega t}\,dt$$
$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\, e^{-i(-k)\omega t}\,dt$$
$$c_0(f) = a_0(f) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt$$

Formule unique pour les coefficients de Fourier complexes ou exponentiels

$$\boxed{c_k(f) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\, e^{-ik\omega t}\,dt}$$

Valable pour $-n \leq k \leq m$

On a alors $pr_m(f)$ = approximant de Fourier de f d'ordre m
$$= \sum_{k=-m}^{m} c_k(f)\, e^{ik\omega t}$$

Exemple $f(t) = t$ sur $[\pi, \pi]$
$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, e^{-ikt}\,dt$$
$-n \leq k \leq m$

si $k \neq 0$ on intègre par parties
$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\left[t\,\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \frac{e^{-ikt}}{ik}\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi(-1)^k}{-ik} - \frac{(-\pi)(-1)^k}{-ik}\right) - \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left[\frac{e^{-ikt}}{(ik)^2}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{0}$$
$$= \frac{(-1)^k}{-ik} = i\,\frac{(-1)^k}{k}$$

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt = 0$$

$\mathrm{pr}_n(f)$

$$= \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} i\,\frac{(-1)^k}{k}\, e^{ik\omega t}$$

```
>fourier_cn(x,k)
```

Running assume(k,integer)
*No checks were made for singular points of antiderivative 1/k^2*cos(k*x) -k*x*2/sin(k*x)+(- (k*1*i)exp(i*k*x)+(- x*k*2*i)exp((-i)*k*x))/(2*i) pour calculer l'intégrale définie dans [-pi,pi]*

$$i\,\frac{(-1)^k}{k}$$

<u>Remarque</u>

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k)$$

donc

$$a_k = 2\,\mathrm{Re}(c_k) \text{ si } k \neq 0$$

$$b_k = -2\,\mathrm{Im}(c_k)$$