Séries de Fourier

1) Approximants de Fourier

(exemple : exo 8 de feuille TD3)

On s'intéresse à des fonctions périodiques

→ T période

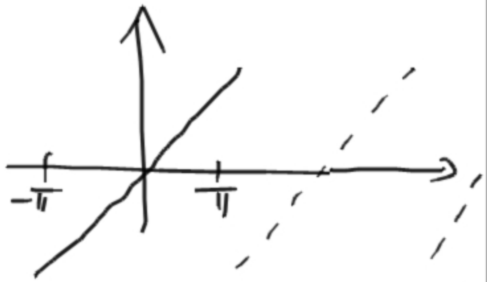
→ $\omega = \frac{2\pi}{T}$

→ $L = \frac{T}{2}$ demi-période

$[-L, L]$

Exemple $T = 2\pi$ $\omega = 1$

$L = \pi$



$\mathbb{1} : t \to 1$ sur $[-L, L]$

$\cos_k : t \to \cos k\omega t$

$\sin_k : t \to \sin k\omega t$

Observation

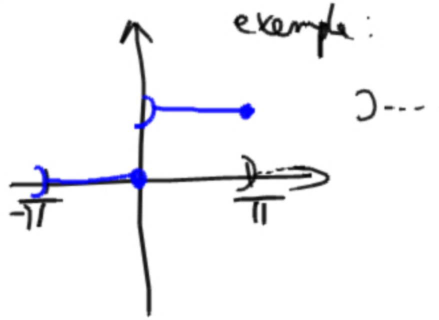
$\mathcal{F} = \{\mathbb{1}, \cos_1, \sin_1, \dots, \cos_n, \sin_n\}$

est une famille orthogonale pour le produit scalaire

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)\, g(t)\, dt$$

défini sur les fonctions continues de $[-L, L]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, également défini sur les fonctions "continues par morceaux", c'est-à-dire qui peuvent avoir un nombre fini de sauts (discontinuités) dans l'intervalle $[-L, L]$

exemple :



Justification rapide du fait que la famille $\mathcal{F} = \{1, \dots, \cos_k, \sin_k, \dots, \cos_n, \sin_n\}$ est orthogonale pour ce produit scalaire

Si on intègre sur une période $\cos_k$ ou $\sin_k$ avec $k \neq 0$

$$\int_{-L}^{L} \cos(k\omega t)\,dt = \left[+\frac{\sin(k\omega t)}{k\omega}\right]_{-L}^{L} = 0$$

$\sin(k\omega L) = \sin(k\omega L - k\omega T)$ $\quad \frac{2\pi}{\omega}$

$= \sin(-k\omega L)$ $\quad L = \pi$, $\omega = 1$

De même pour

$$\int_{-L}^{L} \sin(k\omega t)\,dt$$

Le produit de 2 fonctions distinctes de $\mathcal{F}$ s'écrit une combinaison linéaire de fonctions $\cos_k$ et $\sin_k$

cos cos $\rightarrow \pm$ de cos

sin sin $\rightarrow \pm$ de cos

cos sin $\rightarrow \pm$ de sin

$\int_{-L}^{L}$ cos cos / sin sin / cos sin = combinaison linéaire d'intégrales précédentes qui sont nulles

$F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$

$\mathcal{F}$ est une base orthogonale de F.

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)g(t)\,dt$$

Si $L = \pi$ $\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$

$$\|\mathbb{1}\|^2 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} 1^2\,dt = 2$$

$$\frac{\mathbb{1}}{\|\mathbb{1}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbb{1}$$

$\|\cos_k\|$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \cos^2 k\omega t\,dt$$

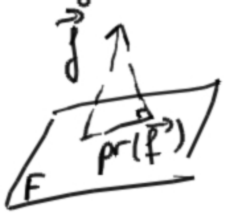
$\cos^2$ vaut en moyenne $\frac{1}{2}$ sur une période

$$= \frac{1}{L} \times \frac{1}{2} \times 2L = 1$$

ou $\cos^2 k\omega t = \frac{\cos 2k\omega t + 1}{2}$

$$\int_{-L}^{L} \frac{\cos 2k\omega t + 1}{2} = \frac{1}{2} \times 2L = L$$

Si $f \in E$ = espace des fonctions continues par morceaux sur $[-L, L]$, on peut calculer le projeté orthogonal de f sur F



Calcul de $pr(\vec{f})$ en utilisant le fait que $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{1}, \cos_1, \sin_1, \dots, \cos_n, \sin_n\right\}$ est orthonormée

$\cos_1 : t \to \cos \omega t$

$\sin_1 : t \to \sin \omega t$

$\vdots$

$\cos_n : t \to \cos n\omega t$

$\sin_n \quad t \to \sin n\omega t$

$$pr(\vec{f})$$
$$= \underbrace{\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{1} \middle| f \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}}_{\to a_0} \mathbb{1}$$
$$+ \underbrace{\langle \cos_1 | f \rangle}_{\to a_1} \cos_1$$
$$+ \underbrace{\langle \sin_1 | f \rangle}_{\to b_1} \sin_1$$
$$+ \dots$$
$$+ \underbrace{\langle \cos_n | f \rangle}_{a_n} \cos_n$$
$$+ \underbrace{\langle \sin_n | f \rangle}_{b_n} \sin_n$$

$$a_0(f) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{1} \middle| f \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)\, dt$$

$$a_k(f) = \langle \cos_k | f \rangle$$
$$= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \cos(k\omega t) f(t)\, dt$$

$$b_k(f) = \langle \sin_k | f \rangle$$
$$= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \sin(k\omega t) f(t)\, dt$$

Avec ces notations

$$pr_F(\vec{f})$$
$$= a_0(f)\, \mathbb{1}$$
$$+ a_1(f) \cos_1 + b_1(f) \sin_1$$
$$+ \dots + a_n(f) \cos_n + b_n(f) \sin_n$$

$$pr_F(\vec{f})(t)$$
$$= a_0(f)$$
$$+ a_1(f) \cos(\omega t) + b_1(f) \sin(\omega t)$$
$$+ \dots$$
$$+ a_n(f) \cos(n\omega t) + b_n(f) \sin(n\omega t)$$

Exemple 1 $\quad T = 2\pi \quad L = \pi \quad \omega = 1$

$f(t) = t$ sur $[-\pi, \pi]$

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{t\cos(kt)}_{\text{fonction impaire}} \, dt$$

$$= 0$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \sin(kt) \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[t \cdot \frac{-\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} \underbrace{- \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \frac{(-\cos(kt))}{k} \, dt}_{0}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\pi \frac{-\cos(k\pi)}{k}}_{} \; = \; \underbrace{-(-\pi)\frac{(-\cos(k\pi))}{k}}_{} \right)$$

$$= -\frac{2\cos(k\pi)}{k} = \frac{-2(-1)^k}{k}$$

Car $\cos(k\pi) = (-1)^k$ pour $k \in \mathbb{Z}$

$$p_n(f) = \sum_{k=1}^{n} b_k(f) \sin_k$$

$$p_n(f)(t)$$

$$= \frac{2}{1}\sin(t) \quad (k=1)$$

$$- \frac{2}{2}\sin(2t) \quad (k=2)$$

$$\vdots$$

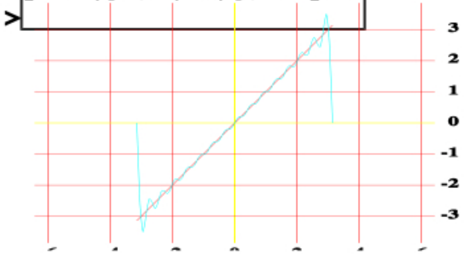
$$\frac{-2(-1)^n}{n}\sin(nt) \quad (k=n)$$

```
> S(n):=sum(-2*(-1)^k/k
```

// Interprète S
// Attention: k,t,declaré(s) comme variable(s) globale(s). Si vous avez besoin de variables symboliques, déclarez les en local et faites purge
// lors de la compilation S
// Attention: k,t,declaré(s) comme variable(s) globale(s). Si vous avez besoin de variables symboliques, déclarez les en local et faites purge

$$n \to \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-2(-1)^k}{k} \times \sin(kt)\right)$$

```
> plot([t,S(15)],t=-pi.
```



On observe que lorsque n augmente, les courbes représentatives de la fonction f et de sa projection sur F se rapprochent, on espère que $S(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$

Il y a toutefois une petite "bosse" près de la discontinuité de la fonction f en $-\pi, \pi$: c'est le phénomène de Gibbs