Critère de Riemann

$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Si $\alpha \leq 1$ alors la série diverge

Si $\alpha > 1$ alors la série converge

Le critère de comparaison prouve le critère de Riemann pour

* $\alpha \leq 1$ on compare avec $\sum \frac{1}{n}$

si $\alpha \leq 1$ $\quad \frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n}$

$\sum \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow \sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge

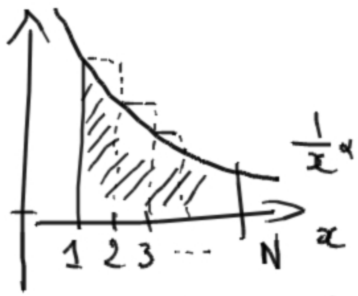
* $\alpha \geq 2$ on compare avec

$\sum \frac{1}{n^2}$ $\quad$ si $\alpha \geq 2$ $\quad \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge

Cas général ($\alpha > 0$) : on compare avec une intégrale : celle de $\frac{1}{x^{\alpha}}$

$\frac{1}{x^{\alpha}}$ est décroissante



aire sous la courbe est $\leq$ aire rectangles

$$= \frac{1}{1^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\alpha}} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

aire sous la courbe

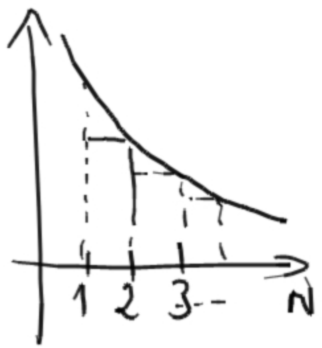
$$= \int_1^N \frac{1}{x^{\alpha}} dx =$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 & [\ln(x)]_1^N = \ln N \\ \alpha \neq 1 & \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^N \end{cases}$$

$$= \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

si $\alpha \leq 1$ $\left|\begin{array}{l} \alpha = 1 \quad \ln(N) \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty \\ \alpha \neq 1 \text{ donc } \alpha < 1 \quad \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} - 1 \xrightarrow[N \to \infty]{} +\infty \end{array}\right.$

La série est $\geq$ à quelque chose qui tend vers l'infini donc elle diverge



aire des rectangles $\leq$ aire sous la courbe

$$\frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{N^\alpha} = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\leq \int_1^N \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

Si $\alpha > 1$

$$\int_1^N \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{-1}{1-\alpha}$$

donc

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}$$

donc la série converge.

Par exemple $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$

$\alpha = \frac{3}{2} > 1$ donc converge

En combinant avec la règle des équivalents, on peut traiter beaucoup d'exemples à l'aide de développement de Taylor

<u>exemple</u> $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n} = x$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\sim -\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}$$

$$-\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{6n^3}$$

critère de Riemann

$\displaystyle\sum \frac{1}{6n^3}$ cv

donc

$\displaystyle\sum -\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$ aussi

donc

$\displaystyle\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$ aussi