On peut utiliser le critère de comparaison pour montrer qu'une série diverge.

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ et si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge aussi (par l'absurde).

Exemple $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Pour $n \geq 1$ $0 \leq u_n \leq v_n$

$\sum \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge

Preuve du fait que $\sum \frac{1}{n}$ diverge

$$\sum_{n=N}^{2N-1} \frac{1}{n}$$

si $N \leq n \leq 2N-1$

alors $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{2N-1} \geq \frac{1}{2N}$

donc $\sum_{n=N}^{2N-1} \frac{1}{n} \geq \underbrace{\#\text{termes}}_{N} \times \frac{1}{2N}$

$\geq \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=N}^{2N-1} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{2^N-1} \frac{1}{n} = \sum_{n=2^0}^{2^1-1} + \sum_{n=2^1-1}^{2^2-1} + \dots + \sum_{n=2^{N-1}-1}^{2^N-1}$$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{N \text{ fois}} = \frac{N}{2}$$

Quand $N \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{2^N-1} \frac{1}{n} \longrightarrow \infty$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

$= 1$

$+ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$

$+ \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \geq 2 \times \frac{1}{4}$

$+ \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15}\right) \geq 4 \times \frac{1}{8}$

$+ \dots \geq 8 \times \frac{1}{16}$

Prop Équivalents

Si on a deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes strictement positifs $0 < u_n$, $0 < v_n$ (à partir d'un certain rang)

Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ $\left(\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1\right)$

alors $\left(\sum u_n\right)$ et $\left(\sum v_n\right)$ sont de même nature : soit convergentes toutes les 2, soit divergentes toutes les 2

Exemple 1 $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$

$0 < \frac{1}{n} \leq 1$ $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0$

et $\frac{1}{n} > 0$ $(n \geq 1)$

$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

car $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ et $\underset{\underset{x}{\shortparallel}}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge

Exemple 2 $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$

$\frac{1}{n(n+1)} > 0$ et $\frac{1}{n^2} > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Prop $\Rightarrow$ $\sum \frac{1}{n^2}$ est de même nature que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ qui est convergente $\Rightarrow \left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ convergente

Preuve de la prop

$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

donc à partir d'un certain rang $\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}$

$u_n \leq \frac{3}{2} v_n$ donc si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge

$\frac{1}{2} v_n \leq u_n$ donc $v_n \leq 2 u_n$

donc si $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n$ diverge.

Remarque : si $u_n \sim v_n$ il suffit de vérifier que l'une des deux est strictement positive, l'autre l'est alors automatiquement

Dans l'exemple $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

avec $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n} > 0$ pour $n \geq 1$ il n'est pas nécessaire de vérifier que $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0$

Critère de d'Alembert

$\left(\sum_{n \geq 0} u_n\right)$ avec u_n de signe quelconque. On suppose que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda \geq 0$

Si $\lambda > 1$ alors $\sum u_n$ diverge

Si $\lambda < 1$ alors $\sum u_n$ converge

Exemple

$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$, $u_n = \frac{1}{n!}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \rightarrow$$

$\lambda = 0$ ici donc $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ converge

Remarque Si $\lambda = 1$, on ne peut rien dire en général

Exemple a $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

ici $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

Exemple b $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

ici $\sum \frac{1}{n}$ diverge

Preuve si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \lambda$

Idée

alors $|u_n|$ se comporte comme une suite géométrique de raison λ

$$\sum_{n=0}^{N} \lambda^n = \frac{\lambda^{N+1}-1}{\lambda-1} \quad \text{si } \lambda \neq 1$$

$\lambda^{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ si $\lambda < 1$

$\lambda^{N+1} \to \infty$ si $\lambda > 1$

Si $\lambda > 1$ à partir d'un certain rang $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geq 1$

donc $|u_{n+1}| \geq |u_n|$

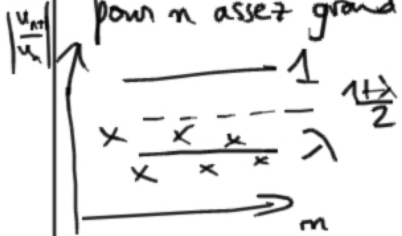
donc le terme général de la suite $|u_n| \not\to 0 \Rightarrow$ diverge

$\hookrightarrow u_n \not\to 0$

Si $\lambda < 1$

$0 \leq \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{1+\lambda}{2}$

pour n assez grand



$$|u_{n+1}| \leq \frac{1+\lambda}{2} |u_n|$$

$$|u_{n+k}| \leq \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^k |u_n|$$

donc on applique le critère de comparaison à la série $\sum_k |u_{n+k}|$ et à la série géométrique $|u_n| \sum_k \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^k$

donc $\sum u_{n+k}$ est absolument convergente donc convergente

Prop Une combinaison linéaire de séries convergentes est encore convergente. Si $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ convergent alors $(\sum \lambda u_n + \mu v_n)$ converge.

Preuve on prend les sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$

et $T_N = \sum_{n=0}^{N} v_n$

$S_N \to S$, $T_N \to T$

donc $\sum_{n=0}^{N} \lambda u_n + \mu v_n$

$$= \lambda \sum_{n=0}^{N} u_n + \mu \sum_{n=0}^{N} v_n$$

$$\xrightarrow[N \to +\infty]{} \lambda S + \mu T$$

```
> sum(1.0/n,n=2^9..2^10
```

0.693635700228

```
> sum(1.0/n^2,n=2^10..2
```

0.488639013685999946609572752720e-3