Séries numériques

Rappels $\left(\sum_n u_n\right)$

suite des sommes partielles

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} ?$$

(ou 1, ...)

u_n terme général de la série

Exemples $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}\right)$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

Etude de la convergence [existence limite]

$\neq$ calcul de la limite

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

ou 1 ... (on ne sait pas en général)

Exceptions : si on sait calculer

$$\sum_{n=0}^{N} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ peut}$$

se calculer avec les séries de Fourier

Prop Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \to 0$

⚠ Réciproque fausse

Prop Si $u_n \geq 0$ alors soit la série converge, soit

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \to +\infty$$

Si u_n n'est pas de signe constant, $\sum_{n=0}^{N} u_n$ peut ne tendre vers aucune limite

Exemple $S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n$

Si N est impair

$$S_N = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + 1 + (-1)$$

$$= 0$$

Si N est pair

$$S_N = 1 + (-1) + \dots + 1 + (-1) + 1 = 1$$

S_N vaut alternativement 0 ou 1 donc n'a pas de limite.

Prop Si $\left(\sum |u_n|\right)$ est convergente, alors $\left(\sum u_n\right)$ est aussi convergente, on dit que la série $\left(\sum u_n\right)$ est absolument convergente

$$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{N}} - \frac{1}{N+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N \to \infty]{} 1$$

donc la série $\left(\sum \frac{1}{n(n+1)}\right)$ est convergente

Par la proposition $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n(n+1)}\right)$ est absolument convergente donc convergente

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + (-1)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots$$

Idée de la preuve "suite de Cauchy"

Suite convergente dans les réels alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N_0 tel que la différence $|u_n - u_m| < \varepsilon$ si n et $m \geq N_0$

et réciproquement

$$|(u_n - \ell) - (u_m - \ell)|$$

$$= |u_n - u_m|$$

$$\leq |u_n - \ell| + |u_m - \ell|$$

$$S_m - S_n = \sum_{k=n}^{m-1} u_k$$

$$|S_m - S_n| = \left|\sum_{k=n}^{m-1} u_k\right|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} |u_k|$$

$\leq$ Somme partielle de $\sum |u_n|$ des indices n à $m-1$

$\leq \varepsilon$ par hypothèse de convergence $\sum |u_n|$

La réciproque est fausse

Si $\sum u_n$ est convergente on peut avoir $\sum |u_n|$ ne converge pas.

Par exemple $\left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}\right)$ est convergente [admet] alors que $\sum \frac{1}{n}$ n'est pas convergente.

Remarque : La nature (convergente ou non) d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

Ainsi quand on parle de série de terme général ≥ 0, il suffit que ce soit le cas à partir d'un certain indice ($n=1$, $n=10$, $n=500$, ...) fixé une fois pour toutes.

Prop Comparaison

Si $(\sum u_n)$ et $(\sum v_m)$ sont deux séries de terme général $u_n \geq 0$, $v_m \geq 0$ alors si Si $0 \leq u_n \leq v_m$ alors si $(\sum v_m)$ converge, $(\sum u_n)$ converge

Exemple $u_n = \frac{1}{n^2}$

et $v_m = \frac{1}{n(n-1)}$ $\qquad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$

Pour $n \geq 2$ $\qquad 0 \leq u_n \leq v_m$

et $(\sum v_m)$ converge

c'est $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ avec indice décalé de 1

Donc $(\sum u_n)$ converge

$$\underset{\displaystyle \sum \frac{1}{n^2}}{\underset{\shortparallel}{\left(\sum u_n\right)}}$$

⚠ on ne peut rien dire sur la valeur de $\sum \frac{1}{n^2}$, on peut juste dire que cela existe

Preuve de la proposition

$\sum_{n=0}^{N} u_n$ est une suite croissante et elle est majorée par $\sum_{n=0}^{N} v_m \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_m$

indépendant de N, donc $\sum_{n=0}^{N} u_n$ est une suite croissante majorée donc convergente