Chap. 4 Séries numériques

"Sommes de nombres jusqu'à l'infini"

par exemple

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$$

ou

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

ou

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots$$

Notation $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2^n}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2}}$$

Sommer à l'infini est évidemment impossible, il faut donner un sens mathématique à $\sum^{\infty}$

Plus généralement, ce qui suit le $\sum$ ce sera une suite u_n

Définition

On appelle série de terme général u_n la suite des "sommes partielles"

$$\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}} \quad (n=0)$$

Si cette suite de sommes partielles converge on dit que la série est convergente. La limite ℓ de la suite des sommes partielles est appelée somme de la série, on note $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \ell$ (ou $n=1$)

Exemple 1er ex $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$

terme général de la série

$$u_n = \frac{1}{2^n}$$

Somme partielle

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n}$$

série géométrique de raison $\frac{1}{2}$

On a une expression explicite

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} = \frac{1-\frac{1}{2^{N+1}}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{2^{N+1}}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2^N}$$

La suite des sommes partielles

$$2 - \frac{1}{2^N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 2$$

donc la série $\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n}\right)$

est convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

2<u>e exemple</u>

On n'a pas de formule pour $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$

Plus difficile de savoir si cette série convergente

Un but du chapitre est d'avoir un critère permettant de savoir si la série converge sans calculer les sommes partielles (ce qu'on ne sait pas faire en général)

$$\frac{n! + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + \dots}{n!}$$

$$= \log(n) + \underbrace{\gamma}_{\text{constante d'Euler}} + \underset{n\to\infty}{o}(1)$$

On peut montrer que

$$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\dots = +\infty$$

$$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Pour $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$

on ne peut toujours pas calculer la somme partielle sous forme explicite avec les fonctions usuelles mais on peut montrer que la suite des sommes partielles converge, et qu'elle converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.

Le but du chapitre n'est pas de calculer la valeur de $\sum^{\infty} u_n$ lorsque la série converge.

Attention à ne pas confondre $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ qui est la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$

avec $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ qui est un nombre (si il existe)

(suite des sommes partielles = série de terme général)

Prop Si $(\sum u_n)$ est une série convergente, alors le terme général $u_n \to 0$

Exemple série géométrique de raison $\frac{1}{2}$: $\left(\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

~~elle~~ la série est convergente, et le terme général $\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Preuve

on a $\sum_{n=0}^{N} u_n \xrightarrow[N\to\infty]{} \ell$

on a aussi $\sum_{n=0}^{N-1} u_n \xrightarrow[N\to\infty]{} \ell$

la différence de ces 2 suites tend vers 0 quand $N\to\infty$

or c'est u_N.

Conséquence (contraposée)

Si le terme général u_n ne tend pas vers 0 alors $\sum u_n$ n'est pas convergente.

Exemple $\left(\sum (-1)^n\right)$

$(-1)^n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

donc $\left(\sum (-1)^n\right)$ n'est pas convergente (= est divergente).

$1 = \sum_{n=0}^{0} (-1)^n = 1$

$0 = \sum_{n=0}^{1} (-1)^n = 1-1$

$1 = \sum_{n=0}^{2} (-1)^n = 1-1+1$

0

1

$\vdots$

en effet a n'est pas convergent

Attention, si le terme général d'une série tend vers 0, on ne peut rien dire de la nature de $(\sum u_n)$

Exemple le 2e exemple

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots \to +\infty$

alors que $\frac{1}{n} \to 0$

Exemple important de séries

séries géométriques

$(\sum \lambda^n)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$

Exercice feuille TD si $\lambda \neq 1$

$$\sum_{n=0}^{N} \lambda^n = \frac{1-\lambda^{N+1}}{1-\lambda}$$

Pour savoir si $(\sum \lambda^n)$ converge il suffit de chercher $\lim\limits_{N\to+\infty} \lambda^{N+1}$

Si $|\lambda|<1$ $\lim\limits_{N\to+\infty} \lambda^{N+1}=0$

donc $\sum \lambda^n$ converge

donc $\lim \frac{1-\lambda^{N+1}}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}$

Si $|\lambda|\geq 1$ le terme général λ^n de la série ne tend pas vers 0 donc la série diverge (= ne converge pas).

Séries à terme positifs

$(\sum u_n)$ avec $u_n \geq 0$ pour tout n

Il y a 2 possibilités pour la suite des sommes partielles

→ soit elle converge

→ soit elle tend vers $+\infty$

En effet soit

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

(S_N) est une suite croissante

$$S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geq 0$$

Une suite croissante majorée est convergente, sinon elle tend vers $+\infty$.