Matrices orthogonals

Déf Une matrice P est dite orthogonale si c'est la matrice d'une base orthonormale.

$${}^tP\,P = I_n$$

Propriété P est orthogonale si et seulement si P préserve la norme (du produit scalaire canonique) ou le produit scalaire canonique

C'est une isométrie vectorielle

Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ $\|P\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$

Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ $\langle P\vec{x} | P\vec{y} \rangle$
$= \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$

Exemples : on peut reprendre les exemples de base orthonormales précédentes obtenues en diagonalisant des matrices symétriques

$n=2$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Norme des vecteurs colonnes

$\|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\|^2 = \frac{1}{2}\,(1^2+1^2) = 1$

$\|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\|^2 = \frac{1}{2}\,(1^2+(-1)^2) = 1$

Vecteurs orthogonaux 2 à 2

$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 1+(-1) = 0$

ok

$n=3$

$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Norme (au carré) d'un vecteur colonne

$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1^2+(-2)^2+2^2 \\ (-2)^2+1^2+2^2 \\ 2^2+2^2+1^2 \end{pmatrix} = 1$

Vecteurs colonnes orthogonaux 2 à 2

$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = -2-2+4$
$= 0$

$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 2-4+2=$

$\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = -4+2+2=$

Preuve de la propriété

Si P est orthogonale ${}^tPP = I$

X les coordonnées du vecteur $\vec{x}$

PX

$$\|P\vec{x}\|^2 = {}^t(PX)\,PX = {}^tX\,{}^tPP\,X = {}^tX\,X = \|\vec{x}\|^2$$

Rappel $({}^tPP)_{i,j}$

= produit scalaire de la ligne i (colonne) de ${}^tP$ avec la colonne j de P

(colonne i de P = ligne i de ${}^tP$)

Si P préserve la norme, il préserve le produit scalaire

$$\langle P\vec{x}|P\vec{y}\rangle = \frac{1}{2}\left(\|P(\vec{x}+\vec{y})\|^2 - \|P\vec{x}\|^2 - \|P\vec{y}\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2\right)$$

$$= \langle \vec{x}|\vec{y}\rangle$$

Si P préserve le produit scalaire, alors

$${}^t(PX)\,PY = {}^tX\,Y$$

$${}^tX\,{}^tPP\,Y = {}^tX\,Y$$

$${}^tX({}^tPP - I)Y = 0$$

pour tous X, Y

ce qui entraîne ${}^tPP - I = 0$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j \qquad X = (0 \cdots 0\,1\,0 \cdots 0)$$

$$\uparrow i$$

$${}^tXMY = M_{i,j}$$

donc $({}^tPP - I)_{i,j} = 0$.

Au final ${}^tPP = I$, P est bien orthogonale.

Isométries vectorielles du plan

$n = 2$

Quelles sont les matrices orthogonales 2×2 ?

$$P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$${}^tP\,P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ c^2+d^2 = 1 \\ ac+bd = 0 \end{cases}$$

il existe θ tel que

$a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$

il existe φ tel que

$c = \sin\varphi$, $d = \cos\varphi$

$$\underbrace{\cos\theta \sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi}_{=\ \sin(\theta+\varphi)} = 0$$

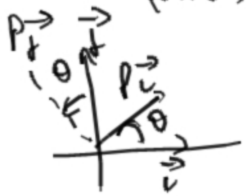
$\theta + \varphi = 0$ ou $\theta + \varphi = \pi$

1er cas $\varphi = -\theta$

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \det P = 1$$

on reconnait la matrice d'une rotation d'angle θ

$$P\vec{i} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$



$$P\vec{j} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

2e cas $\theta = \pi - \varphi$

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$ P symétrique réelle

$\det P = -1$

On a le polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - \lambda \end{vmatrix}$$

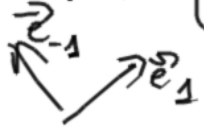
$= (\cos\theta - \lambda)(-\cos\theta - \lambda) - \sin^2\theta$

$= \lambda^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= \lambda^2 - 1$

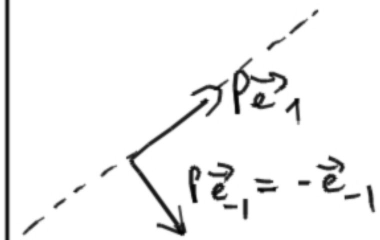
2 valeurs propres 1 et -1

vecteurs propres sont orthogonaux (car P sym réelle)



P est la symétrie par rapport à la droite D de vecteur directeur $\vec{e}_1$

$P\vec{v} = 1\,\vec{v} = \vec{v}$ si $\vec{v} = \lambda\vec{e}_1$



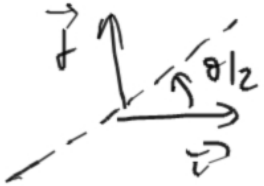
Calcul de $\vec{e}_1$ (val. propre 1)

$P - I$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2\sin^2\frac{\theta}{2} & 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & -2\cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

on voit que $\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(P - I)$



$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ symétrie par rapport à la droite faisant un angle de $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe des x.

Exemple $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}$ det $=-1$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

symétrie | droite angle $\frac{\pi}{8}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$ det $=1$

rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$

Remarque en dimension 3 les isométries vectorielles sont de deux types

→ les isométries directes de det $=1$ qui sont des rotations dans un plan orthogonal à un axe de rotation

→ les indirectes qui sont composées de une rotation et une symétrie par rapport à un plan $\perp$ à l'axe de rotation.