Application : calcul d'une base q-orthogonale et orthonormale pour le produit scalaire usuel si q est une forme quadratique

Résultat si P est la matrice de passage d'une base orthonormale pour le produit scalaire usuel alors ${}^tP\,P = I_n$

$P = \left(\vec{v}_1 \middle| \dots \middle| \vec{v}_n\right)$ coord. en colonnes

où $(\vec{v}_1, \vec{v}_n)$ est ma base orthonormale

${}^tP = \begin{pmatrix} \overline{\vec{v}_1} \\ \overline{\vec{v}_n} \end{pmatrix}$ en lignes

$({}^tP\;P)_{i,j}$ ligne colonne

= produit scalaire de la i-ème ligne de ${}^tP$ avec la j-ème colonne de P

= 1 si $i=j$ et 0 sinon

car base orthonormale

Soit q une forme quadratique, sa matrice dans la base canonique c'est une matrice symétrique réelle A. On peut donc la diagonaliser dans une base orthonormale $(\vec{v}_1, \vec{v}_n)$ de $\mathbb{R}^n$. La matrice de passage de la base canonique à $(\vec{v}_1, \vec{v}_n)$ est une matrice P telle que ${}^tP\,P = I_n$

On a
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
matrice diagonale des valeurs propres

${}^tP\,P = I_n$ on a $P^{-1} = {}^tP$

donc
$$\underbrace{{}^tP\,A\,P}_{} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
formule de changement de base pour une forme quadratique

Donc la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_n)$ qui était orthonormale pour le produit scalaire usuel est orthogonale pour la forme quadratique q.

Exemple on peut reprendre les 2 exemples précédents

$$q(x,y) = 3x^2 + 8xy + 3y^2$$

forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ de matrice dans la base canonique $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

La base orthonormale de vecteurs propres de A calculée précédemment

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = (v_1, v_2)$$

est une base orthogonale pour la forme quadratique q. Si on note X et Y les coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ dans cette base (v_1, v_2)

$$\vec{v} = X\vec{v}_1 + Y\vec{v}_2$$

$$q(\vec{v}) = 7X^2 - Y^2$$

Application : permet de trouver les axes de symétries d'une conique donnée par son équation cartésienne

$q(x,y) = 4$ devient

$$7X^2 - Y^2 = 4$$

v_1, v_2 sont les axes de symétries et on a une hyperbole