Diagonalisation des matrices symétriques réelles

A une matrice $n \times n$ à coeffs réels A symétrique, par ex

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (n=2)$$

On va montrer que A admet une base orthonormale de vecteurs propres dans $\mathbb{R}^n$.

Rappel $\vec{v}$ vecteur propre de A associé à λ valeur complexe (en général) de A

si $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$
$\vec{v} \in \mathbb{C}^n$

Ici lorsque A est symétrique réelle on va voir que $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Premier résultat $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\langle A\vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | A\vec{y} \rangle$$

En effet X vecteur colonne des coordonnées de $\vec{x}$, Y pour $\vec{y}$

$$\langle A\vec{x} | \vec{y} \rangle$$
$$= {}^t(AX)\, Y = {}^tX\, {}^tA\, Y$$
$$= {}^tX A Y \text{ car } A \text{ est symétrique}$$
$$= \langle \vec{x} | A\vec{y} \rangle$$

Deuxième résultat

Si $\vec{x}$ est vecteur propre de A associé à λ valeur propre

Si $\vec{y}$ ____________

____________ μ

si $\lambda \neq \mu$ alors $\vec{x} \perp \vec{y}$

En effet

$$\langle A\vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | A\vec{y} \rangle$$
$$\langle \lambda\vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \mu\vec{y} \rangle$$
$$\lambda \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \mu \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$$
$$(\lambda - \mu) \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$$

$\lambda \neq \mu$ donc $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$

Théorème Si A est une matrice réelle symétrique, A admet une base orthonormale de vecteurs propres associés à des valeurs propres réelles

Preuve Soit λ une valeur propre de A

$\lambda \in \mathbb{C}$, soit $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ un vecteur propre associé

$A\vec{x} = \lambda \vec{x}$

Si A est à coefficients réels $\overline{A\vec{x}} = \overline{\lambda \vec{x}}$

$A\overline{\vec{x}} = \overline{A}\,\overline{\vec{x}} = \overline{\lambda}\,\overline{\vec{x}}$

on a donc $\overline{\lambda}$ valeur propre également.

$\langle A\overline{\vec{x}} \mid \vec{x}\rangle = \langle \overline{\vec{x}} \mid A\vec{x}\rangle$

$\langle \overline{\lambda}\,\overline{\vec{x}} \mid \vec{x}\rangle = \langle \overline{\vec{x}} \mid \lambda\vec{x}\rangle$

$\overline{\lambda}\langle \overline{\vec{x}} \mid \vec{x}\rangle = \lambda\langle \overline{\vec{x}} \mid \vec{x}\rangle$

En coordonnées

$\langle \overline{\vec{x}} \mid \vec{x}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, x_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}_{\neq 0}$

car $\vec{x} \neq \vec{0}$

$(\overline{\lambda} - \lambda)\underbrace{\langle \overline{\vec{x}} \mid \vec{x}\rangle}_{\neq 0} = 0$

donc $\overline{\lambda} = \lambda$

λ est bien réel

λ est réel donc on peut choisir $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$

On peut alors restreindre A à $\mathrm{Vect}(\vec{x})^\perp$

Si $n=1$ il n'y a plus rien à faire (à part normer le vecteur propre)

Si $n>1$, on fait une récurrence

Montrons que si $\vec{y} \in \mathrm{Vect}(\vec{x})^\perp$ alors $A\vec{y} \in \mathrm{Vect}(\vec{x})^\perp$

En effet $\langle A\vec{y} \mid \vec{x}\rangle$

$= \langle \vec{y} \mid A\vec{x}\rangle$

$= \langle \vec{y} \mid \lambda\vec{x}\rangle$

$= \lambda\langle \vec{y} \mid \vec{x}\rangle = 0$

car $\vec{y} \in \mathrm{Vect}(\vec{x})^\perp$

Pour obtenir une base orthonormale de vecteurs propres de A, on prend une base orthonormale de vecteurs propres de A restreint à $\mathrm{Vect}(\vec{x})^\perp$ et on complète par $\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$

Remarque Pour une matrice A réelle symétrique générique, les valeurs propres de A sont de multiplicité 1 (espaces propres de dimension 1) la diagonalisation se fait comme pour une matrice A quelconque et la base obtenue est orthogonale (pour le produit scalaire usuel) il suffit de normaliser les vecteurs propres

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$ symétrique réelle

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)^2 - 4^2$$

$$= (3-\lambda-4)(3-\lambda+4)$$

$$= (-1-\lambda)(7-\lambda)$$

Valeurs propres $\lambda = 7$, $\lambda = -1$

$\lambda = 7$ $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$

$x = y = 1$ $\vec{v}_7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$ $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$

$x = 1$ $y = -1$ $\vec{v}_{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

on a bien $\vec{v}_7 \perp \vec{v}_{-1}$

Base orthonormale

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Suite remarque

Lorsqu'on a une valeur propre λ de multiplicité > 1 on aura espace propre de dimension > 1

le calcul de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ va donner une base de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ qui en général n'est pas orthogonale, il suffit alors de faire [G]ram-Schmidt sur cette base de l'espace propre

Exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

symétrique réelle

```
> A:=[[1,-2,2],[-2,1,2]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
> factor(det(A-lambda*i
```

$$-\left((\lambda-3)^2(\lambda+3)\right)$$

3 est valeur propre de multiplicité 2

-3 est valeur propre de multiplicité $\underline{1}$

$\underline{\lambda=-3}$

$$A+3I = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2L_2+L_1 \\ 2L_3-L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \\ \cancel{0} & \cancel{6} & \cancel{6} \end{pmatrix}$$

$\cancel{y=z}$ $\quad y=-z$

$\cancel{4x-2y+2z=0}$ $\quad x=0$

~~$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à $\lambda=-3$~~

$4x+4z=0 \quad x=-z$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}_{-3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à $\lambda=-3$

$\underline{\lambda=3}$

$$A-3I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x+y-z=0$$

$$z=x+y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} + y\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}$$

on a bien $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_{-3}$
et $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_{-3}$

Mais $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas orthogonaux (il n'y a pas de raison car ils sont dans le même sous-espace propre).

Il reste à orthonormaliser $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ par Gram-Schmidt

$$\vec{v}_1 \to \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p_{\vec{u}_1}(\vec{v}_2) = \langle \vec{u}_1 | \vec{v}_2 \rangle \vec{u}_1$$

$$= \frac{1}{2}\langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_1$$

$$= \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = v_2 - pr_{u_1}(v_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base orthonormale de $Vect(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$: $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$

Base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ de vecteurs propres

$$\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \frac{\vec{v}_{-3}}{\|\vec{v}_{-3}\|}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

<u>Observation</u> : P est la matrice de passage d'une base orthonormale

$${}^tP = P^{-1}$$

car ${}^tP P = I_3$

Donc on a aussi

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$