Approximant de Fourier

Fonctions continues sur $[-\pi, \pi]$
à valeurs dans $\mathbb{R} = E$
(dim infinie)

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt$$

On rajoute la constante $\frac{1}{\pi}$ pour avoir

$$\langle \cos | \cos \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{2} \times 2\pi = 1$$

$$\|\cos\| = 1$$

$$\langle \sin | \sin \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t)\, dt$$

$$= 1 = \|\sin\|^2$$

$$\langle \sin | \cos \rangle$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t) \cos(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin(2t)\, dt$$

$$= 0$$

$$\langle 1 | \sin \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\, dt$$

$$= 0$$

$$\langle 1 | \cos \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\, dt$$

$$= 0$$

$\{1, \sin, \cos)$ est orthogonale

$$\langle 1 | 1 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dt$$

$$= 2$$

$\Big(\underset{u_1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \underset{u_2}{\sin}, \underset{u_3}{\cos}\Big)$ est orthonormée

$\left[\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ fonctions constantes}\right]$

Si on se donne une fonction $f(x) = |x|$ par exemple
continue de $[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$
on peut chercher la fonction la plus proche de f dans $\mathrm{Vect}(1, \sin, \cos) = F$

C'est la projection de f sur F calculée en utilisant la base orthonormée
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin, \cos\right)$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \vec{u}_2 = \sin(t) \qquad \vec{u}_3 = \cos(t)$$

$$\begin{aligned} pr(f) &= \langle \vec{u}_1 | f \rangle \vec{u}_1 \\ &\quad + \langle \vec{u}_2 | f \rangle \vec{u}_2 \\ &\quad + \langle \vec{u}_3 | f \rangle \vec{u}_3 \end{aligned}$$

$$\langle \vec{u}_1 | f \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$$

$$\langle \vec{u}_2 | f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(t)\, dt$$

$$\langle \vec{u}_3 | f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(t)\, dt$$

les $\langle \vec{u}_2 | f \rangle$, $\langle \vec{u}_3 | f \rangle$ sont les coefficients de Fourier de f premiers