Exemple 2

$\mathbb{R}^2$ $q(x,y) = x^2+2xy+3y^2$
$= (x+y)^2 + 2y^2$

signature $(2,0) = (\dim \mathbb{R}^2, 0)$

q est un produit scalaire

Gram-Schmidt pour base q-orthonormale de $\mathbb{R}^2$ à partir de la base canonique $\left(\vec{e}_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

$\vec{u}_1 = \dfrac{\vec{e}_1}{\sqrt{q(\vec{e}_1)}}$ $\quad q(1,0) = 1$

$\vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \phi(\vec{e}_1, \vec{e}_2)\,\vec{e}_1$

où ϕ est la forme polaire de q

$\text{Mat}_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\leftarrow \phi(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$\phi(\vec{u}_1, \vec{e}_2) = \phi(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$
$= 1$

$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$q(f_2) = (-1)^2 + 2(-1)\times 1 + 3\times 1^2$
$= 2$

$\vec{u}_2 = \dfrac{\vec{f}_2}{\sqrt{q(f_2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

⚠ il faut normer avec q et pas avec le produit scalaire usuel.

(Si $q(x,y) = x^2+2xy+4y^2$ on diviserait par $\sqrt{3}$ et pas par $\sqrt{2}$)

Base q-orthonormale
$\left(\vec{u}_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \right)$

Si $\vec{u} = X\vec{u}_1 + Y\vec{u}_2$
$q(\vec{u}) = X^2 + Y^2$

Exemple 3

$\mathbb{R}_2[X]$ poly de degré ≤ 2 à coeffs réels

$\phi(P, Q)$
$= P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0)$
$+ P(1)Q(1)$

ϕ forme bilinéaire symétrique

$\phi(P,P) = P^2(-1) + P^2(0)$
$+ P^2(1) \geq 0$

et si $\phi(P,P) = 0$
$P(-1) = P(0) = P(1) = 0$

P est factorisable par $(X-1)X(X+1)$

donc P est nul ($d^\circ P \leq 2$)

ϕ est un produit scalaire

Gram-Schmidt sur la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$

$\vec{e}_1 = 1$

$\phi(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 3 \quad \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\phi(1, X)$
$= 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1$
$= 0 \qquad X \perp \vec{u}_1$

$\vec{f}_2 = X - pr_{\vec{u}_1}(X)$
$= X$

$\vec{u}_2 = \frac{\vec{f}_2}{\sqrt{\phi(\vec{f}_2, \vec{f}_2)}} = \frac{X}{\sqrt{2}}$

$\vec{f}_3 = \vec{e}_3 - pr_{\vec{u}_1, \vec{u}_2}(\vec{e}_3)$

$= X^2 - \langle \vec{u}_1 | X^2 \rangle \vec{u}_1 - \langle \vec{u}_2 | X^2 \rangle \vec{u}_2$

$= X^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \langle 1 | X^2 \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \langle X | X^2 \rangle \frac{X}{\sqrt{2}}$

$= X^2 - \frac{1}{3} \langle 1 | X^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle X | X^2 \rangle X$

$\langle X, X^2 \rangle = \phi(X, X^2)$
$= -1 \cdot (-1)^2 + 0 + 1 \cdot 1^2$
$= 0$

$\langle 1, X^2 \rangle = \phi(1, X^2)$
$= 1 \cdot (-1)^2 + 0 + 1 \cdot 1^2$
$= 2$

$\vec{f}_3 = X^2 - \frac{2}{3}$

$\vec{u}_3 = \frac{\vec{f}_3}{\sqrt{\phi(\vec{f}_3, \vec{f}_3)}} = \frac{X^2 - \frac{2}{3}}{\sqrt{\langle X^2 - \frac{2}{3}, X^2 - \frac{2}{3} \rangle}}$

$\langle X^2 - \frac{2}{3}, X^2 - \frac{2}{3} \rangle$
$= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{9}$

$\vec{u}_3 = \frac{X^2 - \frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{6}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(3X^2 - 2)$

Exemple 4

E = fonctions continues de $[0, \frac{\pi}{2}]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

Gram-Schmidt sur un sous-espace vectoriel de dimension finie de E

Produit scalaire

$\langle f | g \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\, g(t)\, dt$

$F = \mathrm{Vect}\langle 1, x \rangle$

abus de notation

$\vec{e}_1 = 1$: fonction constante $x \to 1$

$\vec{e}_2 = x$: fonction $x \to x$

$F = \mathrm{Vect}(x \to 1, x \to x)$

[ou $F = \mathrm{Vect}(x \to 1, \ id)$]

$$\langle \vec{e}_1 | \vec{e}_1 \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{e}_1}{\sqrt{\pi/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$ (fonction constante)

$$\vec{f}_2 = \vec{e}_2 - pr_{\vec{u}_1}(\vec{e}_2)$$

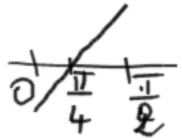
$$= x - \langle \vec{u}_1 | \vec{e}_2 \rangle \vec{u}_1$$

$$= x - \frac{2}{\pi} \langle 1 | x \rangle$$

$$\langle 1 | x \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\vec{f}_2 = x - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{8} = x - \frac{\pi}{4}$$

$$\langle \vec{f}_2 | \vec{f}_2 \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(t - \frac{\pi}{4}\right)^2 dt$$



$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(t - \frac{\pi}{4}\right)^2 dt$$

$$= 2 \left[\frac{\left(t - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$\vec{u}_2 = \frac{x - \frac{\pi}{4}}{\sqrt{\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^3}}$$

Si on veut trouver la projection de cos $(x \to \cos(x))$ sur F

$$pr_F(\cos) = \langle u_1 | \cos \rangle u_1 + \langle u_2 | \cos \rangle u_2$$

$$\langle u_1 | \cos \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \, dt \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\langle u_2 | \cos \rangle = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(t - \frac{\pi}{4}\right) \cos(t) \, dt$$

```
> integrate((t-pi/4)*co
```

$\frac{1}{4}\pi - 1 \approx -0.214601836603$

$\langle u_2 | \cos \rangle$

$= \frac{1}{\sqrt{\ }}\left(\frac{\pi}{4} - 1\right)$

$pr_F(\cos)$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$+ \frac{1}{\sqrt{\ }}\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) \frac{x - \frac{\pi}{4}}{\sqrt{\ }}$

$= \frac{2}{\pi} + \frac{\frac{\pi}{4} - 1}{\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$= g(x)$

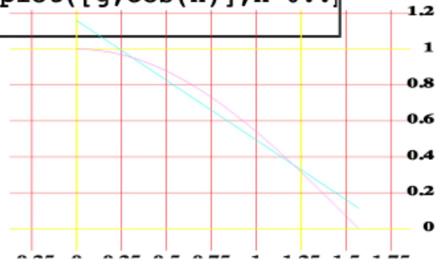
$g(x)$ est la fonction de $F = \mathrm{Vect}(1, x)$ la plus proche de la fonction cos pour le produit scalaire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\, g(t)\, dt$

C'est la fonction linéaire (de la forme $a+bx$) la plus proche de cos sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en moyenne

```
> g:=2/pi+(pi/4-1)/(2/3
```

$\frac{\left(-\frac{1}{4}\pi + x\right)\left(\frac{1}{4}\pi - 1\right)}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\pi\right)^3} + \frac{2}{\pi}$

```
> plot([g,cos(x)],x=0..
```



On peut faire de même pour n'importe quelle fonction continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et obtenir la "meilleure" approximation par un segment de droite (courbe représentative de toutes les fonctions de $F = \mathrm{Vect}(1, x)$)