Algèbre linéaire

1) Résolution de systèmes linéaires homogènes

exemple (x,y,z) /

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 & (1) \\ 4x+5y+6z=0 \\ x-y=0 & (3) \end{cases}$$

Si (x_1,y_1,z_1) est solution
(x_2,y_2,z_2)

alors $(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)$
$=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$

est encore solution

de même que $\lambda(x_1,y_1,z_1)$
$=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$

Stabilité de l'ensemble des solutions par combinaison linéaire $\Rightarrow$ espace vectoriel de solutions.

Méthode du pivot de Gauss

Système linéaire $\rightarrow$ système triangulaire (ou diagonal) pour résolution

Matrice du système

coeffs de x en 1e colonne

y en 2e

2nd membre en dernière colonne

$$\left(\begin{array}{ccc:c} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2-4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{array}$$

Si système homogène, on n'écrit pas la dernière colonne de 0.

Combinaison linéaire de lignes pour créer des 0 sous la diagonale ou de part et d'autre.

Correspond à une combinaison linéaire d'équations

$L_3 \leftarrow L_3-L_1$

$(3) \leftarrow (3)-(1)$

1re colonne : on choisit un coefficient non nul à partir de la 1ère ligne si nécessaire on échange les lignes (revient à échanger des équations)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

2e colonne : on choisit un coef non nul à partir de la 2ème lignes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} x+2y+3z=0 \\ -3y-6z=0 \\ 3z=0 \end{matrix}$$

$x=y=z=0 \quad S=\{\vec{0}\}$

Si pour une colonne donnée il n'y a pas de coefficient non nul, on passe à la colonne suivante <u>sans</u> changer le numéro de ligne à partir duquel on cherche

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{-6} \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{-3} \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{L_2}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} x+2y=0 \\ z=0 \end{matrix}$$

$x=-2y$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$S = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

= ensemble des combinaisons linéaires de $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ici c'est une droite vectorielle)

Variante du pivot de Gauss créer des 0 au-dessus de la diagonale, surtout utile si le second membre est non nul.

Espaces vectoriels

Sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$

λ^{t} λ^{t}

Un ensemble V (de vecteurs) a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si on a défini V une addition $+$ (somme de 2 vecteurs de V → élément de V) et une loi externe de multiplication $\cdot$ par un réel ou un complexe selon le cas avec propriétés

$+$: → vecteur nul $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$

→ commutatif $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$

→ opposé Pour tout $\vec{v}$ il existe $\vec{w}\,(=-\vec{v})$ tel que $\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$

→ associativité $(\vec{v}+\vec{w})+\vec{z}=\vec{v}+(\vec{w}+\vec{z})$

$\cdot$: $1\cdot\vec{v}=\vec{v}$

distributif $(\lambda+\mu)\cdot\vec{v}=\lambda\cdot\vec{v}+\mu\cdot\vec{v}$

$\lambda\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\lambda\cdot\vec{v}+\lambda\cdot\vec{w}$

$\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{v})=(\lambda\mu)\cdot\vec{v}$

Sous-espace vectoriel (prop)

Si V est un espace vectoriel et $W\subset V$, W est un espace vectoriel s'il vérifie

- $\vec{0}\in W$
- si $\vec{w}_1,\vec{w}_2\in W$ $\vec{w}_1+\vec{w}_2\in W$
- $\lambda\vec{w}\in W$ (avec $\lambda\in\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ selon que V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel)

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$

Autres exemples

<u>$\mathbb{R}$-ev</u> $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$,

matrices $L \times C$ à coeffs réels,

polynômes à coeffs réels,

polynômes —— de degré $\leq d$ fixé

fonctions : $I \to \mathbb{R}$

I intervalle de $\mathbb{R}$

$\mathbb{C}$-ev remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$

<u>EX</u> • Ensemble des fonctions périodiques de période 2π $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

• Fonctions périodiques de période quelconque ?

Non, car la somme de 2 fonctions dont les périodes ne sont pas en rapport rationnel n'a pas de raison d'être périodique

Contre-exemple à creuser

$$f(x) = \underbrace{\sin(\sqrt{2}\, x)}_{\frac{2\pi}{\sqrt{2}}} - \underbrace{\sin(x)}_{2\pi}$$

Prouver que f n'est pas périodique

<u>oui</u> $\mathcal{E}$

· fonction nulle $\in \mathcal{E}$

$0(x+2\pi) = 0(x) = 0$

· $f \in \mathcal{E}$ et $g \in \mathcal{E}$

$(f+g)(x+2\pi)$

$= f(x+2\pi) + g(x+2\pi)$

$= f(x) + g(x)$

$= (f+g)(x)$

donc $f+g \in \mathcal{E}$

· $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{E}$

$(\lambda f)(x+2\pi) = \lambda f(x+2\pi)$

$= \lambda f(x)$

$= (\lambda f)(x)$