Algorithme de Gram-Schmidt

Soit E un espace euclidien (E est un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire)

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base quelconque de E. On va construire une base orthogonale ou orthonormale de E qui vérifie

$$\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k) = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$$

où $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ est la base orthogonale (ou orthonormale) qu'on va construire.

$x = y + z$

$\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ base de E

$\rightarrow \vec{u}_1, \vec{u}_2,$

$\vec{u}_1 =$ multiple de $\vec{e}_1$

$\mathrm{Vect}(\vec{e}_1) = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1)$

$\vec{u}_2 = \vec{e}_2 - pr_{\vec{e}_1}(\vec{e}_2)$

$\in$ plan $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$

$\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = E = \mathbb{R}^3$

$= \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{n})$

<u>Méthode</u> on suppose qu'on a construit $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{k-1}$

Pour calculer $\vec{u}_k$ on prend

$$\vec{f}_k = \vec{e}_k - \text{projection}_{\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{k-1})}(\vec{e}_k)$$

$\vec{f}_k \perp \vec{e}_1$

$\vdots$

$\vec{f}_k \perp \vec{e}_{k-1}$

De même $\vec{f}_k \perp \vec{u}_1$

$\vdots$

$\vec{f}_k \perp \vec{u}_{k-1}$

car $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{k-1})$

$= \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{k-1})$

Donc

$(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{k-1}, \vec{f}_k)$ est une famille orthogonale et on peut la normaliser

$$\vec{u}_k = \frac{\vec{f}_k}{\|\vec{f}_k\|}$$

<u>Remarque</u> $\vec{f}_k \neq \vec{0}$

sinon $\vec{e}_k \in \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{k-1})$

(car $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ base de E)

et on a bien

$\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k) = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$

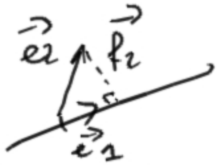
<u>k=1</u> rien à faire $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}$$

(1ère étape de l'algo)

<u>k=2</u> (2ème étape)

$\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{k-1}) = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1)$



<u>k=3</u> (3ème étape)

$\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{k-1}) =$ plan

$k > 3$ on ne peut plus faire de dessin

Exemples et applications à la recherche de la projection et de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

<u>ex 1</u>/ plan $x = y + z$

base orthogonal du plan

$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{f}_2}{\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$p(\vec{w}) = \langle \vec{u}_1 | \vec{w} \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{u}_2 | \vec{w} \rangle \vec{u}_2$$

distance de $\vec{w}$ au plan

$\|\vec{w} - p(\vec{w})\|$

$$= \left\| \frac{x-y-z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left| \frac{x-y-z}{3} \right| \sqrt{3}$$

Base orthonormal de l'espace en faisant Gram-Schmidt sur

$\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ déjà calculés

$\vec{u}_3$? $\quad \vec{f}_3 = \vec{e}_3 - p_{\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}(\vec{e}_3)$

$$p(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_3 = \vec{e}_3 - p(\vec{e}_3)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{f}_3\| = \frac{1}{3} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{f}_3}{\|\vec{f}_3\|} = \frac{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ base orthonormal

Dans $\mathbb{R}^3$ on peut obtenir ~~le~~ un vecteur $\vec{u}_3$ plus rapidement en faisant le produit vectoriel $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & \vec{i} \\ 1 & -1/2 & \vec{j} \\ 0 & 1 & \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ opposé de $\vec{u}_3$