Calcul des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée (d'un espace vectoriel E de dim. finie muni d'un produit scalaire)

$(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ base de E

$\vec{v} \in E$

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i$$

$$\langle \vec{u}_j | \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}_j | \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \vec{u}_j | \vec{u}_i \rangle$$

base orthonormée

$$\langle \vec{u}_j | \vec{u}_i \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$\lambda_j = \langle \vec{u}_j | \vec{v} \rangle$$

Formule

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{u}_i | \vec{v} \rangle \vec{u}_i$$

Généralisation

E pas forcément de dimension finie, V est un sous-espace vectoriel de dimension finie

base orthonormée $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ de V

$\vec{w} \in E$ pas forcément dans V, on peut appliquer la formule à W

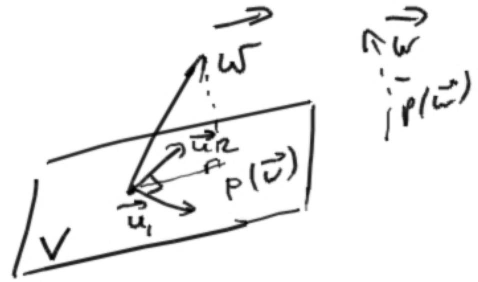
$$p(\vec{w}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{u}_i | \vec{w} \rangle \vec{u}_i$$

1ère observation

$p(\vec{w}) \in V$

2e observation

$\vec{w} - p(\vec{w})$ est orthogonal à tous les vecteurs de V



En effet $\vec{w} - p(\vec{w})$ est orthogonal à chaque vecteur de la base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ de V

$$\langle \vec{w} - p(\vec{w}) | \vec{u}_j \rangle$$

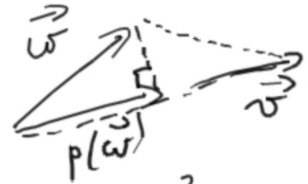
$$= \langle \vec{w} | \vec{u}_j \rangle - \langle p(\vec{w}) | \vec{u}_j \rangle$$

$$= \langle \vec{w} | \vec{u}_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{u}_i | \vec{w} \rangle \underbrace{\langle \vec{u}_i | \vec{u}_j \rangle}_{0 \text{ ou } 1 \text{ si } i=j}$$

$= \langle \vec{w} | \vec{u_j} \rangle - \langle \vec{u_j} | \vec{w} \rangle$

$= 0$

Le vecteur $p(\vec{w})$ est le vecteur de V le plus proche de $\vec{w}$ pour cette norme



$\|\vec{v} - \vec{w}\|^2$

$= \|\underbrace{\vec{v} - p(\vec{w})}_{\in V} + \underbrace{p(\vec{w}) - \vec{w}}_{\perp \text{ à } V}\|^2$

$= \|\vec{v} - p(\vec{w})\|^2 + \|p(\vec{w}) - \vec{w}\|^2$

$\geq \|\underset{V}{\underset{\cap}{p(\vec{w})}} - \vec{w}\|^2$

La distance (ou norme) au carré de $\vec{w}$ à un vecteur quelconque $\vec{v} \in V$ est $\geq$ la distance au carré de $\vec{w}$ au vecteur $p(\vec{w})$

Pour calculer $p(\vec{w})$ la projection de $\vec{w}$ sur l'espace vectoriel V, il est très utile de pouvoir calculer une base orthonormale de V

On peut le faire avec un algorithme appelé algorithme de Gram-Schmidt

---

Orthogonal d'un sous-espace vectoriel V

$V^\perp = \{\vec{w} \in E / \vec{w} \perp V\}$

$\vec{w}$ est orthogonal à tous les vecteurs de V

Propriétés

* $V \cap V^\perp = \{\vec{0}\}$

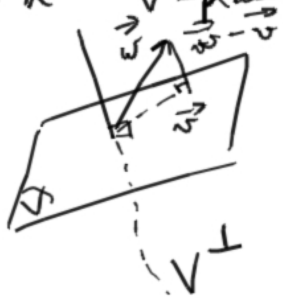
en effet si $\vec{w} \in V$ et $\vec{w} \in V^\perp$ alors $\vec{w} \perp \vec{w}$

$\langle \vec{w} | \vec{w} \rangle = 0$ donc $\vec{w} = \vec{0}$

* si V est de dimension finie alors $V \oplus V^\perp = E$

tout vecteur $\vec{w}$ de E s'écrit comme somme d'un vecteur de V et d'un vecteur de $V^\perp$

$E=\mathbb{R}^3$ V = plan



$\vec v$ = projection de $\vec w$ sur V

$\vec w - \vec v \in V^\perp$

$$\vec w = \underset{\substack{\Uparrow \\ V}}{\vec v} + \underset{\substack{\Uparrow \\ V}}{\vec w - \vec v}$$

Dém on prend une base orthonormée de V

on pose $\vec v = p(\vec w)$

Il exist bien une base orthonormée de V d'après le chapitre précédent, il existe une base orthogonale de V et il suffit de la normer vecteur par vecteur

Exemple rechercher la distance d'un point de $\mathbb{R}^3$ au plan

$V = \{x = y + z\}$

Base de V

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in V$ si $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y+z\\y\\z\end{pmatrix}$

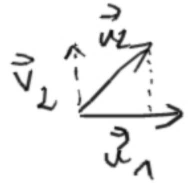
$$= y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

base non orthogonale

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 1$$

$$\vec u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$



$\vec v_2 = \vec u_2 -$ projection $\perp$ de $\vec u_2$ sur $\vec u_1$

$= \vec u_2 - \lambda \vec u_1$

avec λ tel que

$\vec v_2 \cdot \vec u_1 = 0$

$\vec u_2 \cdot \vec u_1 - \lambda \vec u_1 \cdot \vec u_1 = 0$

$1 - \lambda 2 = 0$

$\lambda = \frac{1}{2}$

$$\vec v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$(\vec{u}_1, \vec{v}_2)$ est une base orthogonale de V

$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{2}$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$\left(\frac{\vec{u}_1}{\sqrt{2}}, \frac{\vec{v}_2}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)$ est une base orthonormée

$\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Projection orthogonale sur V ?

$$p(\vec{w}) = \left\langle \frac{\vec{u}_1}{\sqrt{2}} \middle| \vec{w} \right\rangle \frac{\vec{u}_1}{\sqrt{2}} + \left\langle \frac{\vec{v}_2}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \middle| \vec{w} \right\rangle \frac{\vec{v}_2}{\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2} \langle \vec{u}_1 | \vec{w} \rangle \vec{u}_1 + \frac{2}{3} \langle \vec{v}_2 | \vec{w} \rangle \vec{v}_2$$

$$= \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \cancel{0}\,1 \\ \cancel{1}\,0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ \cancel{0}\,1 \\ \cancel{1}\,0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(x + \cancel{z}\,y) \begin{pmatrix} 1 \\ \cancel{0}\,1 \\ \cancel{1}\,0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\left(\frac{2z - y + x}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

par exemple si $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$p(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cancel{0}\,1 \\ \cancel{1}\,0 \end{pmatrix} + \frac{\cancel{4}\,2}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{\begin{pmatrix} 7/6 \\ -1/6 \\ 4/3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 4/3 \\ \cancel{-1}\,2/3 \\ 2\cancel{4}/3 \end{pmatrix}$$

$\|\vec{w} - p(\vec{w})\|$ distance du point $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ au plan V

sauf erreurs de calcul

Cas général $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$p(\vec{w}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3(x+y) + (2z - y + x) \\ 3(x+y) - (2z - y + x) \\ 2(2z - y + x) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4x + 2y + 2z \\ 2x + 4y - 2z \\ 2(2z - y + x) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + 2y - z \\ 2z - y + x \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} - p(\vec{w}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + 2y - z \\ 2z - y + x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x-y-z \\ -x+y+z \\ -x+y+z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{x-y-z}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

on reconnait l'équation du plan $x = y + z$ et le vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

On voit que $\vec{w} - p(\vec{w})$ est orthogonal au plan

La base $(\underbrace{\vec{v}_1, \vec{v}_2}, \vec{n})$ est une base $\perp$ de $\mathbb{R}^3$