3) Cas général

⚠ On ne sera pas toujours en dimension finie

Déf On dit qu'une forme bilinéaire symétrique φ définie sur un espace vectoriel E est positive si la forme quadratique q associée est positive, donc si $q(\vec{x}) = \varphi(\vec{x},\vec{x}) \geq 0$ pour tout $\vec{x} \in E$

On dit que φ est définie positive si de plus $q(\vec{x}) = 0$ entraîne $\vec{x} = 0$

On appelle produit scalaire une forme bilinéaire symétrique définie positive.

On appelle norme (associée au produit scalaire) d'un vecteur $\vec{x}$, notée

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{q(\vec{x})}$$

qui est bien définie puisque $q(\vec{x}) \geq 0$ pour tout $\vec{x} \in E$

Défini positif entraîne que $\|\vec{x}\| = 0$ alors $\vec{x} = \vec{0}$.

Exemples et contre-exemples

- en dimension finie produit scalaire usuel ou canonique de $\mathbb{R}^n$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 x'_1 + \dots + x_n x'_n$$

est bien bilinéaire symétrique

$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n = 0$

- forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$: la décomposition de Gauss permet de savoir si on a un produit scalaire associé

Il faut que la signature de q soit $(n = \text{la dimension}, 0)$

$\mathbb{R}^2$ $q(x,y) = x^2 + xy + y^2$

$$= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + y^2$$

$$= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} y^2$$

signature $(2,0) \rightarrow$ associé à un produit scalaire qui n'est pas le produit scalaire usuel

$\mathbb{R}^2$ $q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$

$$= (x+y)^2 \geq 0$$

signature $(1,0)$

la forme quadratique est positive mais pas définie positive

par exemple $q(1,-1) = 0^2 = 0$

alors que $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$\mathbb{R}^2$ $q(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 y^2 + y^2$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{5}{4} y^2$$

donc q n'est pas positive

par exemple

$$q\left(-\frac{3}{2}, 1\right) = 0^2 - \frac{5}{4} 1^2 < 0$$

• en dimension infinie

$E = \{$ fonctions continues de $[a,b] \rightarrow \mathbb{R} \}$

$\varphi(f,g)$

$$= \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

φ est bilinéaire symétrique

$\varphi(g,f) = \varphi(f,g)$

$\varphi(f, g_1 + \lambda g_2)$

$$= \int_a^b f(t)\, (g_1 + \lambda g_2)(t)\, dt$$

$$= \int_a^b f(t)\, g_1(t)\, dt + \lambda \int_a^b f(t)\, g_2(t)\, dt$$

$$= \varphi(f, g_1) + \lambda \varphi(f, g_2)$$

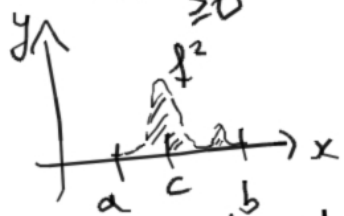
φ est positive car

$$\varphi(f,f) = \int_a^b \underbrace{f^2(t)}_{\geq 0} dt \geq 0$$

φ est définie positive car

$\varphi(f,f) = 0$

$$= \int_a^b \underbrace{f^2(t)}_{\geq 0} dt$$



Si f^2 est strictement positive en $c \in [a,b]$

par continuité f^2 reste > 0 sur un petit intervalle autour de c et l'aire sous la courbe sera > 0

Donc $f^2 = 0$ sur $[a,b]$

$\Rightarrow f = 0$

- $E = \{$ polynômes à coeffs réels $\}$

$\varphi(P,Q) = P(0)\,Q(0) + P(1)\,Q(1)$

φ est symétrique

on vérifie que φ est bilinéaire

$\varphi(P,P) \geq 0$

$\varphi(P,P) = P(0)^2 + P(1)^2$

φ est positive mais elle n'est pas définie

Par exemple $X(X-1) = P$

$P(0) = P(1) = 0$

$\varphi(P,P) = 0$ mais $P \neq 0$

Ce n'est pas un produit scalaire sur E

Par contre c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_1[X] = \{$ polynômes de degré $\leq 1 \}$

$\varphi(P,P) = 0$

$= P(0)^2 + P(1)^2$

$\Rightarrow P(0) = P(1) = 0$

donc P est factorisable par X et par $(X-1)$

et si en plus degré$(P) \leq 1$ seul $P = 0$ convient

__Inégalité de Cauchy-Schwarz__

Si on a un produit scalaire défini sur un espace vectoriel E alors

$$|\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \quad (*)$$

et on a égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

__Preuve__ si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul alors on a égalité dans $(*)$ et colinéarité

$\|\vec{u}+\lambda\vec{v}\|^2$
$= \langle \vec{u}+\lambda\vec{v} | \vec{u}+\lambda\vec{v} \rangle$
$= \langle \vec{u}|\vec{u}\rangle + 2\lambda \langle \vec{u}|\vec{v}\rangle$
$+ \lambda^2 \underbrace{\langle \vec{v}|\vec{v}\rangle}_{a}$
≥ 0

on a un polynôme de degré 2 en λ qui est ≥ 0 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Donc son discriminant est ≤ 0

$a\lambda^2 + b\lambda + c$

$a = \langle \vec{v}|\vec{v}\rangle$ $\quad b = 2\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle$

$c = \langle \vec{u}|\vec{u}\rangle$

$b^2 - 4ac = \Delta$

$= 4\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle^2 - 4\langle \vec{v}|\vec{v}\rangle\langle \vec{u}|\vec{u}\rangle$

≤ 0

$\Rightarrow \langle \vec{u}|\vec{v}\rangle^2$
$\leq \langle \vec{v}|\vec{v}\rangle\langle \vec{u}|\vec{u}\rangle$

$\sqrt{\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle^2} \leq \sqrt{\langle \vec{v}|\vec{v}\rangle} \sqrt{\langle \vec{u}|\vec{u}\rangle}$

$|\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle| \leq \|\vec{v}\| \, \|\vec{u}\|$

Si on a égalité dans $(*)$ le discriminant est nul on a une racine double $\tilde{\lambda}$

on a alors

$\|\vec{u}+\tilde{\lambda}\vec{v}\|^2 = 0$

donc $\vec{u}+\tilde{\lambda}\vec{v} = \vec{0}$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple d'application

$E = \{$fonctions continues de $[a,b] \to \mathbb{R}\}$

$\varphi(f,g) = \langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$

si on prend $f = t \to 1$

$\varphi(f,g) = \int_a^b g(t)\,dt$

$\|f\| = \sqrt{\int_a^b 1^2\,dt} = \sqrt{b-a}$

Cauchy-S warz donne

$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right|$

$\leq \sqrt{b-a} \, \underbrace{\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}}_{= \|g\|}$