2) $\mathbb{R}^3$

produit scalaire canonique

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v}$

$= xx' + yy' + zz'$

Prop

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

toujours vrai en dimension 3

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Remarque : si on se place dans un plan de coordonnées

par exemple dans Oxy

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}$

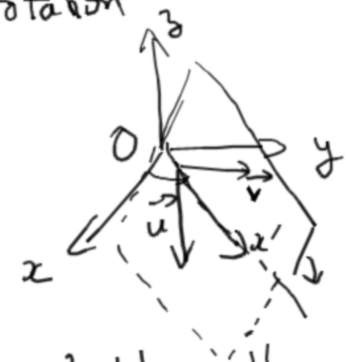
$\vec{u} \underset{\mathbb{R}^3}{\cdot} \vec{v} = xx' + yy'$

$=$ produit scalaire dans Oxy

Donc le produit scalaire est invariant par rotation dans le plan Oxy d'axe Oz.

De même pour les autres axes de coordonnées.

Donc pour n'importe quelle rotation



avec 2 rotations d'axes de coordonnées on peut se ramener au cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dans le plan Oxy où on a bien $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$

On a donc toujours

$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

Cauchy-Schwarz

On se donne un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ et un vecteur $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$

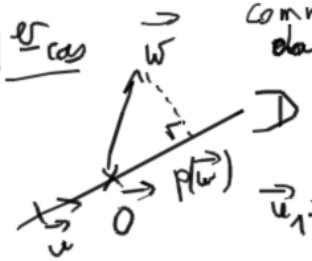
Peut-on réaliser le minimum de la distance (= norme) entre $\vec{w}$ et un vecteur $\vec{v}$ de E

2 cas intéressants

- si E est de dimension 1 (droite vectorielle)

• ou si E est de dimension 2
plan vectoriel

1er cas

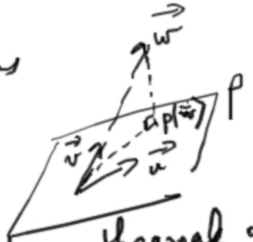


comme dans $\mathbb{R}^2$

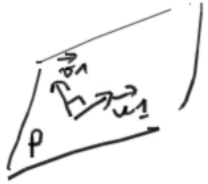
$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

$$p(\vec{w}) = \langle \vec{u}_1 | \vec{w} \rangle \vec{u}_1$$

2e cas



projection orthogonale de $\vec{w}$ sur P ?



$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

$$\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{v}_1) = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = P$$

$$p(\vec{w}) = \langle \vec{u}_1 | \vec{w} \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{v}_1 | \vec{w} \rangle \vec{v}_1$$

on peut vérifier que

$$p(\vec{w}) \perp \vec{w} - p(\vec{w})$$

Exemple $\mathbb{R}^3$

P = plan vectoriel de vecteurs directeurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

On va construire $(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$ telle que

$$\begin{cases} \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0 \\ \|\vec{u}_1\| = 1 \\ \|\vec{v}_1\| = 1 \end{cases}$$

(début de base orthonormée de $\mathbb{R}^3$) et $P = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$

et $\mathrm{Vect}(\vec{u}) = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

On commence par construire une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui sera orthogonale à $\vec{u}$.

$\vec{v} - \lambda \vec{u}$, λ à déterminer

$$(\vec{v} - \lambda \vec{u}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} - \lambda \|\vec{u}\|^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

$\vec{v} \cdot \vec{u} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times (-1)$

$= 1$

$\|\vec{u}\|^2 = 2 \qquad \lambda = \frac{1}{2}$

$\vec{v} - \lambda \vec{u}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\|\vec{v} - \lambda \vec{u}\|$

$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2}$

$= \frac{\sqrt{6}}{2} \qquad \vec{v}_1 = \frac{2}{\sqrt{6}} (\vec{v} - \lambda \vec{u})$

$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Début de base orthonormée

$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

qui vérifie

$\rightarrow \vec{u}_1 \parallel \vec{u} \quad \mathrm{Vect}(\vec{u}) = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1)$

$\rightarrow \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = P = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$

Remarque on pourrait construire une base orthonormée complète de $\mathbb{R}^3$ en complétant par $\vec{u}_1 \wedge \vec{v}_1$ construction spécifique à la dimension 3 ou

en prenant un vecteur $\vec{w} \notin P$ et en le rendant orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_1$

$\vec{w} - \lambda \vec{u}_1 - \mu \vec{v}_1$

on cherche λ et μ pour que $\vec{w} - \lambda \vec{u}_1 - \mu \vec{v}_1$ soit $\perp$ à $\vec{u}_1$ et à $\vec{v}_1$

(algorithme de Gram-Schmidt)