Chapitre 3: produits scalaires

1) le cas de $\mathbb{R}^2$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= xx' + yy'$$

produit scalaire dit canonique

C'est une forme bilinéaire symétrique de matrice I_2 dans la base canonique

Propriété q forme quadratique associée alors q est définie positive c'est-à-dire

$$q(x,y) = x^2 + y^2$$

$q(x,y) \geq 0$ et si

$q(x,y) = 0$ alors $(x,y) = (0,0)$

Propriétés dans $\mathbb{R}^2$

le produit scalaire est invariant par rotation

En passant aux complexes

$$z = x + iy$$

$$z' = x' + iy'$$

$$\bar{z}\, z' = (x - iy)(x' + iy')$$

$$= xx' + yy' + i(\dots)$$

$$\left\langle \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right\rangle = \mathrm{Re}(\bar{z}\, z')$$

Si on fait une rotation d'angle θ, $z \to e^{i\theta} z$

$z' \to e^{i\theta} z'$

$$\mathrm{Re}(\overline{e^{i\theta} z}\ \ e^{i\theta} z')$$

$$= \mathrm{Re}(\cancel{e^{-i\theta}}\, \bar{z}\ \ \cancel{e^{i\theta}}\, z')$$

$$\left\langle R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| R_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \mathrm{Re}(\overline{e^{i\theta} z}\ \ e^{i\theta} z')$$

$$= \mathrm{Re}(\bar{z}\, z')$$

$$= \left\langle \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right\rangle$$

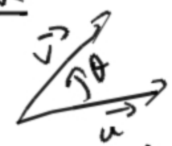
Norme du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$= \sqrt{q(x,y)} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Résultat

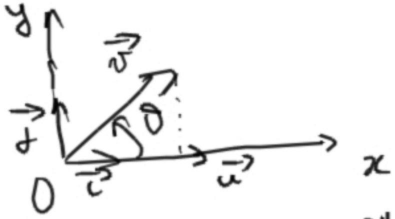
$$\left\langle \underset{\vec{u}}{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} \middle| \underset{\vec{v}}{\begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix}} \right\rangle = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Preuve



le produit scalaire est invariant par rotation

On peut supposer que $\vec{u}$ est selon l'axe Ox orienté



$\vec{u}\begin{pmatrix}\|\vec{u}\|\\ 0\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{v}\begin{pmatrix}\|\vec{v}\|\cos\theta\\ \|\vec{v}\|\sin\theta\end{pmatrix}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$$

<u>Conséquence</u> inégalité de Cauchy-Schwarz

$|\cos\theta| \le 1$

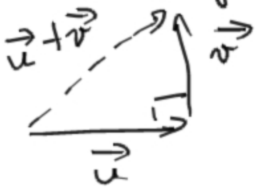
$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \le \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

Orthogonalité entre 2 vecteurs

Si $\vec{u}\cdot\vec{v} = \langle\vec{u}|\vec{v}\rangle$
$= 0$

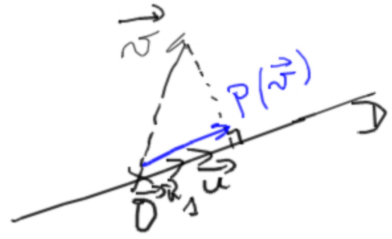
$\vec{u}\perp\vec{v}$

Théorème de Pythagore



$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Droite vectorielle



La projection orthogonale de $\vec{v}$ sur D est le vecteur de D qui est le plus proche de $\vec{v}$

On construit un début de base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ adaptée au problème

$\vec{u}_1 = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ $\quad$ $\|\vec{u}_1\| = 1$

$$p(\vec{v}) = \langle\vec{u}_1|\vec{v}\rangle\,\vec{u}_1$$

En effet

$\vec{v} - p(\vec{v}) = \vec{v} - \langle\vec{u}_1|\vec{v}\rangle\,\vec{u}_1$

$\langle\vec{u}|\vec{v} - p(\vec{v})\rangle$

$= \langle\vec{u}|\vec{v}\rangle - \langle\vec{u}|p(\vec{v})\rangle$

$= \langle\vec{u}|\vec{v}\rangle - \langle\vec{u}|(\vec{u}_1\cdot\vec{v})\,\vec{u}_1\rangle$

$= \langle\vec{u}|\vec{v}\rangle - (\vec{u}_1\cdot\vec{v})\langle\vec{u}|\vec{u}_1\rangle$

$\vec{u} = \|\vec{u}\|\,\vec{u}_1$

$= \|\vec{u}\|\,\vec{u}_1\cdot\vec{v} - \vec{u}_1\cdot\vec{v}\,\|\vec{u}\|\underbrace{\langle\vec{u}_1|\vec{u}_1\rangle}_{1}$

$= 0$

Propriété de la projection

$p(\vec{v})$ réalise le

$$\min_{\vec{w}\in D} \|\vec{v}-\vec{w}\|$$