Exemple de calcul de base q-orthonormale

$$q(x,y,z) = x^2 - 4xy + 2xz + 12y^2 - 12yz + 6z^2$$

Gauss éliminons x

$$= (x-2y+z)^2 - (-2y+z)^2 + 12y^2 - 12yz + \cancel{6}^{5} z^2$$

$$= (x-2y+z)^2 + 8y^2 - 8yz + \cancel{6}^{5} z^2$$

$$= (x-2y+z)^2 + 2\left[(2y-z)^2 - z^2\right] + \cancel{6}_{5} z^2$$

$$= (x-2y+z)^2 + 2(2y-z)^2 + \cancel{4}^{3} z^2$$

Signature $(3,0) = (\text{dimension}, 0)$

rang $= 3 =$ dimension

Donc q est définie positive

$$\mathrm{Mat}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La base qu'on va calculer sera q-$\perp$ mais pas q-orthonormale

1er vecteur $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2y-z=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2e vecteur $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2y-z=1 \\ z=0 \end{cases}$

$y = \frac{1}{2}$ $x = 1$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

3e vecteur $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2y-z=0 \\ z=1 \end{cases}$

$z=1$ $y=\frac{1}{2}$ $x=0$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

base q-$\perp$ mais pas q-orthonormale

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Normalisation par rapport à q

$$q\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1, \quad q\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2, \quad q\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 3$$

Une base q-orthonormale

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}}, \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{q\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$

2ème exemple

$E = \mathbb{R}_2[X]$

= polynômes degré ≤ 2 à coefficients réels

$q(f) = \int_{-1}^{1} f^2(t)\, dt$

$\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t) g(t)\, dt$

Base canonique de E $(1, X, X^2)$

$P \in E \quad P = a + bX + cX^2$

$q\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)$

$\varphi(1,1) = 2 = \int_{-1}^{1} 1^2\, dt$

$\varphi(1,X) = \varphi(X,1) = 0 = \int_{-1}^{1} t\, dt$

$\varphi(X^2,X) = \varphi(X,X^2) = 0$

$\varphi(X,X) = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

$\varphi(X^2,X^2) = \int_{-1}^{1} t^4\, dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$

$\varphi(X^2,1) = \varphi(1,X^2) = \frac{2}{3}$

$\mathrm{Mat}_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$

$q(a,b,c) = a^2 + \frac{2}{3}b^2 + \frac{4}{3}ac + \frac{2}{5}c^2$

Gauss

$q(a,b,c)$

$= \left(a + \frac{2}{3}c\right)^2 - \frac{4}{9}c^2 + \frac{2}{5}c^2 + \frac{2}{3}b^2$

$= \left(a + \frac{2}{3}c\right)^2 + \frac{2}{3}b^2 + \frac{1}{45}c^2$

signature $(3,0) = (\dim \mathbb{R}_2[X], 0)$

rang $= 3$

q est définie positive

Base q-orthogonale

$\begin{cases} a + \frac{2}{3}c = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

$\begin{cases} a + \frac{2}{3}c = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X$

$\begin{cases} a + \frac{2}{3}c = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} + X^2$

$\mathcal{B}' = \left(1, X, -\frac{2}{3} + X^2\right)$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/45 \end{pmatrix}$

base orthonormée

$\left(\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{X}{\sqrt{2/3}}, \frac{-\frac{2}{3} + X^2}{\sqrt{1/45}}\right)$