Exemples

1er exemple $q(x,y)=(x+2y)^2-4y^2$

dim 2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

signature $(1,1)$ rang $=2$

$\oplus \quad \ominus$

2e exemple $q(x,y,z)$

dim 3 $=(x+y+2z)^2-(y+z)^2-3z^2$

$\oplus \quad \ominus \quad \ominus$

signature $(1,2)$ rang $=3$

3e exemple dim 4

$q(x,y,z,t) =$
$(x+y+z+t)^2 + (y+z+t)^2$
$- (y-z+3t)^2 + 8t^2$

$\oplus \quad \oplus \quad \ominus \quad \oplus$

Signature $(3,1)$ rang $=4$

Exemple avec rang $<$ dim

dim 2 $q(x,y)=x^2+2xy+y^2$
$=(x+y)^2+0\cdot y^2$

Base q-orthogonale 1er vecteur

$\begin{cases} x+y=1 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2e vecteur

$\begin{cases} x+y=0 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Mat(q) ds la base canonique

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

${}^tPMP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

signature $(1,0)$

rang $=1 <$ dim $=2$

Avertissement

Le calcul de la signature d'une forme quadratique en comptant le nombre de signes $\oplus$ devant un carré et le nombre de signes $\ominus$ est correct si on applique l'algorithme de Gauss, mais pas si on prend une expression quelconque de ce type

Exemple dim 2

$2xy = (x+y)^2 - x^2 - y^2$
$= q(x,y)$

$\oplus \quad \ominus \quad \ominus$

Mais la signature de q n'est pas $(1,2)$, rang $\neq 3$

$2xy \overset{\text{Gauss}}{=} \frac{1}{2}\left((x+y)^2-(x-y)^2\right)$

signature $(1,1)$, rang 2

La $1^{\text{ère}}$ décomposition ne convient pas au calcul de la signature parce que les arguments des carrés ne sont pas linéairement indépendants

L'argument de $(x+y)^2$ ($= x+y$) est la somme de l'argument de x^2 et de l'argument de y^2

$$\cancel{\begin{cases} x+y=1 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}}$$

L'algorithme de Gauss garantit que les arguments dans les carrés sont linéairement indépendants parce qu'on élimine les variables une par une en créant un carré (ou 2 par 2 en créant 2 carrés)

Cas où la signature est (dimension, 0) alors la forme quadratique q est dite définie positive c'est ce qu'on appelle un produit scalaire, et on peut alors construire des bases orthonormales, la matrice de q dans ces bases est l'identité la forme bilinéaire φ polaire (sym) de q s'écrit comme le produit scalaire usuel

$$q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

$\downarrow$

coordonnées du vecteur dans la base q-orthonormale

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Si la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_i = q(\vec{e_i})$$

avec tous les $\lambda_i > 0$

on "norme" les vecteurs de $\mathcal{B}$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_n)$

$$\to \left(\frac{\vec{e}_1}{\sqrt{q(\vec{e}_1)}}, \dots, \frac{\vec{e}_n}{\sqrt{q(\vec{e}_n)}}\right) = \mathcal{B}'$$

Dans la base $\mathcal{B}'$

on a bien

$$q\left(\frac{\vec{e}_i}{\sqrt{q(\vec{e}_i)}}\right) = 1 \text{ car}$$

$$= \varphi\left(\frac{\vec{e}_i}{\sqrt{q(\vec{e}_i)}}, \frac{\vec{e}_i}{\sqrt{q(\vec{e}_i)}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q(e_i)}^2} \varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_i)$$

$$= \frac{1}{q(e_i)} q(e_i) = 1$$