Signature d'une forme quadratique

1ère observation : les coefficients qui apparaissent sur la diagonale d'une matrice de forme quadratique dans une base φ-orthogonale ne sont pas intrinsèques, ils dépendent des choix faits dans l'algorithme

$\neq$ valeurs propres d'un endomorphisme

Exemple 1

$$q(x,y) = x^2 + 4xy$$
$$= (x+2y)^2 - 4y^2$$
$${}^tPMP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Au lieu de prendre
1e coordonnée $x+2y$
2e coordonnée y

Je peux aussi prendre comme 2e coordonnée $2y$

$$q(x,y) = (x+2y)^2 - (2y)^2$$

1e colonne de P $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2y=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2e colonne de P $\begin{cases} x+2y=0 \\ 2y=1 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\neq$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrice diagonale
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La valeur des coefficients sur la diagonale dépend du choix de base φ-orthogonale mais on verra que les signes n'en dépendent pas à permutation près

Déf la signature d'une forme quadratique c'est le couple
(nombre de signes $\oplus$,
nombre de signes $\ominus$)
le rang de q = somme des 2
φ