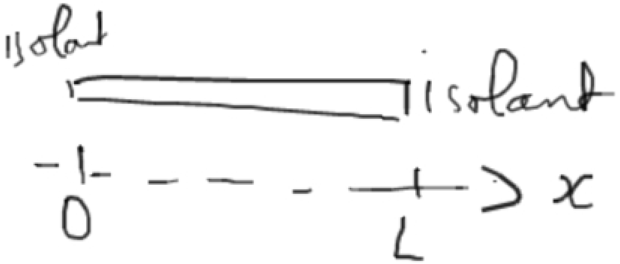
Equation de la chaleur



$t=0$ $\quad T(L)$ très chaud ($L = x$)

$T(x=0)$ $\quad 20°$

? $t \nearrow$

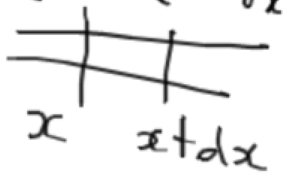
$T(x,t)$

équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (*)$$

$$k>0$$

$\frac{\partial T}{\partial x}(x) \leftarrow \quad \leftarrow \frac{\partial T}{\partial x}(x+dx)$



Bilan $\frac{\partial T}{\partial x}(x+dx) - \frac{\partial T}{\partial x}(x)$

$dx \frac{\partial T}{\partial t}$ proportionnel à

$\frac{\partial T}{\partial t}$ prop. à $\dfrac{\frac{\partial T}{\partial x}(x+dx) - \frac{\partial T}{\partial x}(x)}{dx}$

$$\xrightarrow[dx \to 0]{} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Pas de méthode de résolution analytique

Trouver une solution particulière ?

→ combinaison grâce à la linéarité de l'équation :

- T_1, T_2 solutions de $(*)$ alors $T_1 + T_2$ aussi
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ constant
  λT_1 solution

→ séparation de variables

$$T(x,t) = f(x)\, g(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f(x)\, g(t)\right) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(f(x)\, g(t)\right)$$

$$f(x)\, g'(t) = k\, f''(x)\, g(t)$$

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{k\, g(t)} = \alpha$$

ne dépend ni de x, ni de t

donc constant !

$$\frac{g'}{k g} = \alpha$$

$$g'(t) = k\alpha\, g(t)$$

$$g(t) = G\, e^{k\alpha t}$$

$$\alpha \leq 0$$

$$f''(x) = \alpha f(x) \qquad \alpha \leq 0 = -\omega^2$$

$$f'' + \omega^2 f = 0$$

éq. caractéristique $r^2 + \omega^2 = 0$

$$r = \pm i\omega$$

$$f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

Conditions aux limites

isolé

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ en } x=0 \text{ et en } x=L$$

$$\parallel$$

$$f'(x)\, g(t) \qquad \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(L) = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = 0 = B\omega \qquad B = 0$$

$$f'(x) = -A\omega \sin\omega x + B\omega\cos\omega x$$

$$f'(L) = 0 = -A\omega \sin\omega L$$

$$\sin\omega L = 0$$

$$\omega L = n\pi \quad n \text{ entier}$$

$$\omega = \frac{n\pi}{L}$$

Solution particulière

$$A\cos\frac{n\pi}{L}x \quad e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

Solution de l'équation de la chaleur

combinaison linéaire de

$$\sum_{n\geq 0} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

à l'instant $t=0$

$$\sum_{n\geq 0} A_n \cos\frac{n\pi x}{L} = T(x) \text{ en } t=0$$

Somme finie → somme infinie

Série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$

somme de nombres

Convergence

Passage aux fonctions

Distance dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Points proches : distance petite

Fonctions proches "distance"

Produit scalaire espaces vectoriels dont les vecteurs sont des fonctions.