Algorithme de Gauss pour les formes quadratiques

But : obtenir une base B_2 φ-orthogonale pour la forme bilinéaire sym φ associée à la forme quadratique q,

q est donnée par son expression en fonction des coordonnées dans la base B_1 (souvent c'est la base canonique de $\mathbb{R}^n$)

$(x_1, \dots, x_n)$ coordonnées dans B_1

$$q(x_1, \dots, x_n) = m_{11} x_1^2 + \dots + m_{nn} x_n^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} m_{ij} x_i x_j$$

$(y_1, \dots, y_n)$ coordonnées dans B_2

$$q(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Si P est la matrice de passage de B_1 à B_2

$$P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$q(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 (\text{C.L. des } x_i)^2 + \dots + \lambda_n (\text{C.L. des } x_i)^2$$

Méthode écrire $q(x_1, \dots, x_n)$ du départ comme une somme de coefficient $*$ (combinaison linéaire des x_i)^2

Exemple $E = \mathbb{R}^2$

$$q(x, y) = x^2 + 4xy$$

Mise sous forme canonique (par rapport à la variable x)

$$= (x + 2y)^2 - 4y^2$$

$$= \lambda_1 (\text{C.L de } x \text{ et } y)^2 + \lambda_2 (\text{C.L. de } \cancel{x}, y)^2$$

Recherche de la matrice de passage correspondant à cette écriture

1^{er} vecteur de B_2 $\quad y_1 = 1$, $y_2 = 0$

$y_1 = 1 = x + 2y$ $\quad x = 1$

$y_2 = 0 = y$ $\quad y = 0$

1e colonne de P $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2e vecteur de $\mathcal{B}_2$ $\quad y_1 = 0$, $y_2 = 1$

$$\begin{cases} y_1 = 0 = x + 2y \\ y_2 = 1 = y \end{cases}$$

$x = -2$

Cas général générique

On va éliminer les variables qui apparaissent dans l'expression de q l'une après l'autre en utilisant une forme canonique

$q(x_1, \ldots, x_n)$

$= m_{11} x_1^2 + \ldots + m_{nn} x_n^2$

$+$ doubles produits

On suppose que $m_{11} \neq 0$ alors on va faire une forme canonique par rapport à $x_1 \to m_{11}(x_1 + \ldots)^2$

$+$ dépendance $x_2, \ldots, x_n$

Exemple 2 $\quad E = \mathbb{R}^3$

$q(x,y,z) = \underline{x^2} + \underline{2xy} + \underline{4xz} + 2yz$

$= (x + y + 2z)^2 - (y + 2z)^2 + 2yz$

$= (x + y + 2z)^2 \underbrace{- y^2 - 2yz - 4z^2}$

ne dépend plus que de y et z

$= (x + y + 2z)^2 - (y + z)^2 + z^2 - 4z^2$

$= \underbrace{(x + y + 2z)^2}_{1} \underbrace{- (y + z)^2}_{-1} \underbrace{- 3z^2}_{-3z^2}$

base $\mathcal{B}_2$ correspondante

1er vecteur $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$x = 1, y = 0, z = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2e vecteur $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

$z = 0, \; y = 1, \; x = -1$ $\quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3e vecteur $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

$y = -1 \quad x = -1$ $\quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

changement base B_1 à B_2

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification ${}^tPMP$ = diagonale

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

${}^tPM =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

${}^tPMP$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Que faire si $m_{11} = 0$ dans $q(x_1, \dots, x_n) = m_{11}x_1^2 + \dots$?

Si $m_{22} \neq 0$ on échange le rôle de x_1 et x_2, on fait une forme canonique par rapport à x_2, on se retrouve avec une forme en $x_1, x_3, \dots, x_n$

Plus généralement il suffit qu'un des coefficients diagonaux soit non nul pour pouvoir éliminer la variable correspondante en faisant une forme canonique.

Le seul cas qui reste c'est celui où tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Ceci peut se produire au début mais aussi en cours de calcul

Exemple 3 $E = \mathbb{R}^4$

$$q(x,y,z,t) = x^2 + 2xy + 2xz + 2xt + y^2 + 6yz - 2yt + z^2 + 10zt + t^2$$

$$= (x+y+z+t)^2 - (y+z+t)^2 + y^2 + 6yz - 2yt + z^2 + 10zt + t^2$$

$$= (x+y+z+t)^2 + \underbrace{4yz - 4yt + 8zt}$$

plus de termes carrés en les variables y, z, t

Au lieu d'éliminer 1 variable avec 1 forme canonique et un carré, on va éliminer 2 variables avec 2 carrés à l'aide de l'identité

$$(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$$

$$4yz-4yt+8zt$$

on choisit 2 variables telles le coefficient en leur produit est non nul, par exemple y et z ici

$$4(y+\underset{2t}{\dots})(z+\underset{-t}{\dots})$$

$$4yz-4yt+8zt = 4\underbrace{(y+2t)}_{a}\underbrace{(z-t)}_{b}+8t^2$$

$$= (y+2t+z-t)^2-(y+2t-(z-t))^2 + 8t^2$$

Finalement

$$q(x,y,z,t) = (x+y+z+t)^2 + (y+z+t)^2-(y-z+3t)^2 + 8t^2$$

```
simplify((x+y+z+t)^2+
```

> *Warning adding 1) at end of input*

$$t^2+2tx-2ty+10tz+x^2+2xy+2xz+y^2+6yz+z^2$$

Calcul de la matrice de passage de la base canonique à la base φ-orthogonale (φ forme polaire de q)

1er vecteur

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ y+z+t=0 \\ y-z+3t=0 \\ t=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y+z+t=1 \\ y-z+3t=0 \\ t=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x=-1 \\ y=z=\frac{1}{2} \\ y=z \end{array} \qquad \begin{pmatrix}-1\\1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y+z+t=0 \\ y-z+3t=1 \\ t=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x=0 \\ y=-z \\ y=1/2 \quad z=-1/2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix}0\\1/2\\-1/2\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y+z+t=0 \\ y-z+3t=0 \\ t=1 \end{cases}$$

$y+z+1=0$

$y-z+3=0$

$y=-2 \quad z=1$

$x=0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que

$$^tPMP=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & 8 \end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

les coefficients sur la diagonale sont les coefficients en facteur des carrés