φ forme bilinéaire <u>symétrique</u> sur e.v. E

q = forme quadratique associée à φ

$\vec{x} \in E \quad q(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}, \vec{x})$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$$

Si E est de dimension finie
$\mathcal{B}$ une base de E

$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ symétrique

$$\begin{tikzcd}
\varphi \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & q \arrow[dl, dashed] \\
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) &
\end{tikzcd}$$

$\vec{x} \in E$ coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$

$\vec{y} \in E$ coordonnées $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = {}^tX\,M\,Y$

$q(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}, \vec{x}) = {}^tXMX$

<u>Exemple</u> $E = \mathbb{R}^2$

si φ a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

x^2 $\quad$ y^2

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

${}^tX\,M\,X$

$= (x \;\; y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= (x \;\; y)\begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+3y \end{pmatrix}$

$x(x+2y) + y(2x+3y)$

$= x^2 + \underbrace{2\cdot 2}xy + 3y^2$

$4 = 2+2 = 2\times 2$

Généralisation E de dimension n $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$M = (m_{ij})\ \begin{matrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$

${}^tX\,M\,X$

$= (x_1 \cdots x_n)\begin{pmatrix} & & \\ & m_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$= (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_{ii} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} m_{ij} x_i x_j$$

$$m_{ij} = m_{ji}$$

$$m_{ij} x_i x_j = m_{ji} x_j x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_{ii} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} 2 m_{ij} x_i x_j$$

<u>Exemple</u> $E = \mathbb{R}^3$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \cancel{q}$$

$$\text{"}q(x,y,z)\text{"} = q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

$$= 1x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 4xy + 6xz + 10yz$$

$$\begin{tikzcd} \varphi \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & q \arrow[dl, dashed, bend left] \\ M \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Etant donné q, retrouver M
on fait une identification

les coefficients des carrés $\longrightarrow$ mis sur la diagonale de la matrice

les coefficients des produits de coordonnées
$\rightarrow$ ligne 1^{e} coordonnée
colonne 2^{e} —
et ligne 2^{e} coordonnée
colonne $1^{ère}$
avec division par 2

Exemple

① $E = \mathbb{R}^2$

$$q(x,y) = q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 + 4xy$$

matrice 2×2

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

② $E = \mathbb{R}^3$

$$q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 4xz + 2yz$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

③ $E = \mathbb{R}^4$

$$q(x,y,z,t) = x^2 + 2xy + 2xz + 2xt + y^2 + 6yz - 2yt + z^2 + 10zt + t^2$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Cas particulier : si la base est φ-orthogonale

Dans ce cas la matrice M est diagonale et donc la forme quadratique ne comporte que des carrés

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$