Cas de la <u>dimension</u> finie

On se donne E un espace vectoriel de dimension finie n, et une base $\mathcal{B}$ de E

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Soit ϕ une forme bilinéaire sur E, $\vec{v}, \vec{w}$ 2 vecteurs de E

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$$

$$\vec{w} = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j$$

$$\phi(\vec{v}, \vec{w})$$

$$= \phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \, \phi\left(\vec{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j\right)$$

lin à gauche de ϕ

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j \, \phi(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$$

lin à droite de ϕ

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\phi(\vec{e}_i, \vec{e}_j)}_{M_{ij}} \, y_j}_{= (M \cdot Y)_i}$$

Déf Matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$

$$M = \left(\phi(\vec{e}_i, \vec{e}_j)\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$$

ligne i, colonne j

$$M_{ij} = \phi(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$$

$$= (M \cdot Y)_i$$

où $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ vecteur colonne des coordonnées de $\vec{w}$

$$\phi(\vec{v},\vec{w}) = \sum_{i=1}^{m} x_i\,(M\cdot Y)_i$$

$=$ produit scalaire du vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec le vecteur colonne MY

$$= {}^tX \cdot MY$$

$$(x_1 \cdots x_n)\begin{pmatrix} (MY)_1 \\ \vdots \\ (MY)_m \end{pmatrix}$$

Prop Si ϕ a pour matrice M dans la base $\mathcal{B}$

$$\phi(\vec{v},\vec{w}) = {}^tX M Y$$

avec X, Y le vecteur colonne des coordonnées de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}$

Exemples

· $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{B}$ base canonique

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 - 4x_2y_2$$

$$= (x_1\ x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1(\alpha y_1 + \beta y_2) + x_2(\gamma y_1 + \delta y_2)$$

$\alpha = 1$, $\beta = 2$

$\gamma = 3$ $\delta = -4$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

ou avec la définition

$$M_{1,1} = \phi(\vec{e}_1, \vec{e}_1)$$

$$= \phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 - 4\cdot 0$$

$$= 1$$

$$M_{1,2} = \phi(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 2$$

- $\mathbb{R}_1[X] = E$

$\phi(A, B) = A(0)\ B(1)$

$\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$

$\mathcal{B} = (1, X)$

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\phi) = \begin{pmatrix} \phi(1,1) & \phi(1,X) \\ \phi(X,1) & \phi(X,X) \end{pmatrix}$$

$\phi(1,1) = 1$

$\phi(1,X) = 1 \times 1 = 1$

$\phi(X,1) = 0$

$\phi(X,X) = 0$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifions la formule

$\phi(\vec{v}, \vec{w})$

$= {}^t$coord de $\vec{v}$ en ligne M $\begin{pmatrix} \text{coord} \\ \text{de} \\ \vec{w} \end{pmatrix}$ colonnes

$\vec{v} = A = a_0 + a_1 X$

$\vec{w} = B = b_0 + b_1 X$

$$\begin{aligned} \phi(\vec{v}, \vec{w}) &= A(0)\ B(1) \\ &= a_0(b_0 + b_1) \\ &= a_0 b_0 + a_0 b_1 \end{aligned}$$

Vecteur ligne des coordonnées de $\vec{v}$ c'est $(a_0\ a_1)$

Vecteur colonne des coord. de $\vec{w}$ c'est $\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &\phi(\vec{v}, \vec{w}) \\ &= (a_0\ a_1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \\ &= (a_0\ a_1) \begin{pmatrix} b_0 + b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a_0(b_0 + b_1) + a_1 \cdot 0 \\ &= a_0 b_0 + a_0 b_1 \quad \underline{\underline{\text{ok}}} \end{aligned}$$

Si ϕ est nulle alors $\mathrm{Mat}(\phi) = 0$ et réciproquement

Pour vérifier que 2 formes bilinéaires

sont identiques, il suffit que leurs matrices soient identiques.

Changement de base pour la matrice d'une forme bilinéaire

$E \quad \phi : E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire

$\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ bases de E

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\phi) = M$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\phi_2) = N$

Quelle relation entre M et N ?

Soit $\underline{P}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$

$\vec{v}$ coord. X_1 dans $\mathcal{B}_1$
X_2 dans $\mathcal{B}_2$

on a $PX_2 = X_1$

$\vec{w}$ coord Y_1 dans $\mathcal{B}_1$
Y_2 dans $\mathcal{B}_2$

$PY_2 = Y_1$

$\phi(\vec{v}, \vec{w})$

$= {}^tX_1 \, M \, Y_1$ (def de Mat ϕ ds $\mathcal{B}_1$)

$= {}^tX_2 \, N \, Y_2$

$= {}^t(P \cdot X_2) \, M \, P Y_2$

$= {}^tX_2 \, {}^tP \, M \, P \, Y_2$

${}^tX_2 N Y_2 = {}^tX_2 \, {}^tPMP \, Y_2$

Vrai pour tous vecteurs X_2, Y_2

on en déduit

$\boxed{N = {}^tPMP}$

Exemple

$\mathbb{R}_1[X]$

$\phi(A, B) = A(0)\, B(1)$

$\mathcal{B}_1$ base canonique $(1, X)$

$\mathcal{B}_2$ base $(1, X-1)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N à partir de déf.

$$N = \begin{pmatrix} \phi(1,1) & \phi(1, X-1) \\ \phi(X-1, 1) & \phi(X-1, X-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{array}{cc} 1 & X-1 \\ \end{array}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ X \end{array}$$

$$^tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$^tP M P$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = N \text{ ok}$$