Lien entre matrice et application linéaire

$$E \xrightarrow{\phi} F$$

$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ $\qquad$ $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m)$

$$\mathrm{Mat}(\phi) = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \phi(\vec{e}_1) \quad \dots \quad \phi(\vec{e}_n) \\ \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \vdots & & & \vdots \\ & & \vdots & & \end{pmatrix} \\ \phi(\vec{e}_j) \end{array} \begin{array}{c} \vec{f}_1 \\ \vdots \\ \vec{f}_m \end{array}$$

$$\mathrm{Mat}(\phi) = M$$

$\vec{v} \in E$

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{e}_j$$

$$\phi(\vec{v}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \phi(\vec{e}_j)$$

i-ième coordonnée de $\phi(\vec{v})$ dans $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m)$

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\phi(\vec{e}_j)_i}_{} \lambda_j$$

Coeff ligne i, colonne j de la mat(ϕ)

Même formule que pour le produit de matrice

$$M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Généralisation : produit de 2 matrices $M \cdot N$

nombre de lignes (N) = nombre de colonnes (M)

$$M \qquad N$$

La k-ième colonne de $M \cdot N$ sera le produit de M par la k-ième colonne de N

Si on a 2 applications linéaires ϕ et ψ

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi", "M"'] \arrow[rr, bend left, "\psi\circ\phi"] & F \arrow[r, "\psi", "N"'] & G \end{tikzcd}$$

$(e_1, \ldots e_n)$ $(f_1, \ldots f_m)$ $(g_1, \ldots g_e)$

M matrice de ϕ ds les bases $(e_1, \ldots e_n) \to (f_1, \ldots f_m)$

N matrice de ψ ds les base $(f_1, \ldots f_m) \to (g_1, \ldots g_e)$

alors la matrice de $\psi \circ \phi$ ds les bases $(e_1, \ldots e_n) \to (g_1, \ldots g_e)$ c'est $N \cdot M$

En effet, on le vérifie pour les vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$

le produit de matrices est associatif

$$NML = (NM) \cdot L = N\,(ML)$$

Par contre $M \cdot N \neq N \cdot M$

déjà il n'est pas certain que les 2 produits soient définis. Même si M et N sont des matrices carrées l'ordre du produit importe

```
> a:=ranm(2,2);b:=ranm(
```

$$\begin{pmatrix} 86 & -97 \\ -82 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -27 & 26 \\ -89 & 63 \end{pmatrix}$$

```
> a*b; b*a
```

$$\begin{pmatrix} 6311 & -3875 \\ 1591 & -1691 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4454 & 2801 \\ -12820 & 9074 \end{pmatrix}$$

Formule donnant l'élément ligne i, colonne j d'un produit MN

$$(MN)_{i,j} = \sum_{1 \leq k \leq \text{nombre de colonnes de } M} M_{i,k} N_{k,j}$$

Inverse d'une matrice

Parenthèse groupe abélien
ensemble G où on a une loi
de composition $*$.

$a \in G, b \in G \quad a \cdot b \in G$

Propriétés groupe

neutre $1 \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

symétrique a donné, il existe b tel que $a \cdot b = b \cdot a$

associativité $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

groupe abélien $a \cdot b = b \cdot a$
commutatif

A matrice carrée de taille n
B inverse si

$$A \cdot B = B \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{= I_n}$$

L'application linéaire ϕ qui correspond à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$

ψ corresp. à B

$\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi =$ application identité

$\mathrm{Ker}(\phi) = \{\vec{0}\}$

si $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(\phi)$
alors

$$\psi \circ \varphi(\vec{v}) = \vec{v}$$
$$= \psi(\vec{0}) = \vec{0}$$

$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^n$

φ est bijective

Inversement si φ est bijective, alors sa matrice est inversible

Exercice si φ est linéaire bijective, son inverse aussi

$\mathrm{Mat}(\varphi)^{-1} = \mathrm{Mat}($bijection réciproque de $\varphi)$

Calcul pratique de l'inverse A^{-1} de A si A est inversible

La k-ième colonne de A^{-1} si on lui applique la matrice A on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$$

on résout le système

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}_{\text{inconnues}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$$

de matrice

$$\left(A \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right) \leftarrow k$$

Si on résoud simultanément tous ces systèmes qui ont même matrice A, la matrice de ces n systèmes simultanés c'est

$$\left(A \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{matrix}\right)$$

$$(A \mid I_n)$$

pivot Gauss

$$(I_n \mid A^{-1})$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right) \quad L_2 \leftarrow -\frac{L}{2}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 -$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\text{ok}}}$$

```
> a:=[[1,1],[1,-1]];inv
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Changement de base

$$E \xrightarrow{\phi} E$$

($F = E$ ϕ endomorphisme)

$A = \mathrm{Mat}(\phi)$ $(e_1, \to e_n)$

$\mathrm{Mat}(\phi)$ $(f_1, \dots f_n)$?

$\shortparallel$

B

P matrice de passage de $(\vec{e}_1, \to \vec{e}_n)$ à $(\vec{f}_1, \to \vec{f}_n)$

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \vec{f}_1 & \cdots & \vec{f}_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} | & & | \\ | & & | \\ | & & | \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{array} \end{array}$$

$\vec{v}$ un vecteur de coordonnées

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ ds la base $(\vec{e}_1, \to \vec{e}_n)$

$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ ds la base $(\vec{f}_1, \to \vec{f}_n)$

$$P \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ | \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\phi(\vec{v})$ dans $(\vec{e}_1, \to \vec{e}_n)$

coord. $A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

dans $(\vec{f}_1, \to \vec{f}_n)$

$\phi(\vec{v})$ coord. $B \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$

$$P B \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$P B P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ | \\ \lambda_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ | \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A = PBP^{-1}$$

$$B = P^{-1}AP$$

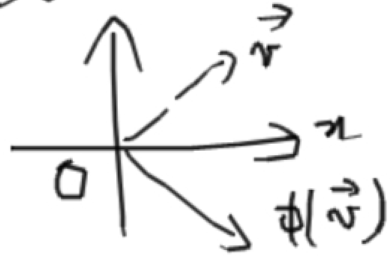
Exemple

$E = \mathbb{R}^2$ plan

ϕ symétrie par rapport à (Ox)

On peut aussi voir ϕ comme l'application $z \to \bar{z}$ en voyant $\mathbb{R}^2 \leftrightarrow \mathbb{C}$

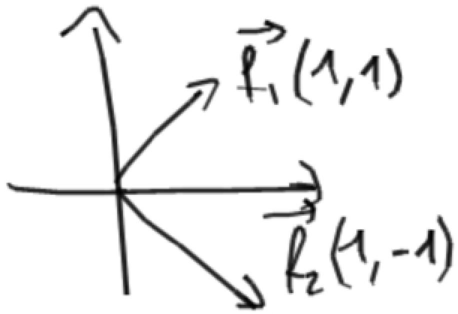
$\mathbb{C}$ étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel



1e base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ base canonique $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ $\mathbb{R}^2$

$(1, i)$ $\mathbb{C}$

2e base



matrice A

$$A = \begin{array}{cc} \phi(\vec{e}_1) & \phi(\vec{e}_2) \\ \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{array}$$

matrice B

$$\begin{array}{cc} \phi(\vec{f}_1) & \phi(\vec{f}_2) \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \end{array}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{array}$$

Vérifions la formule

$$B = P^{-1}AP$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Intérêt : trouver une base de E dans laquelle la matrice de ϕ est simple, par exemple diagonale si on a une base formée de vecteurs propres