ϕ application linéaire $V \to W$
$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ - ev

$\mathrm{Im}(\phi) = \{ \vec{w} \in W$ tel qu'il existe $\vec{v} \in V \mid \vec{w} = \phi(\vec{v}) \}$

<u>Prop</u> $\mathrm{Im}(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de W

. $\vec{0} \in \mathrm{Im}(\phi)$ $\quad \vec{0} = \phi(\vec{0})$

. $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathrm{Im}(\phi)$
$\vec{w}_1 = \phi(\vec{v}_1)$, $\vec{w}_2 = \phi(\vec{v}_2)$

$$\underbrace{\vec{w}_1 + \vec{w}_2}_{\in \mathrm{Im}(\phi)} = \phi(\vec{v}_1) + \phi(\vec{v}_2) = \phi(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

. $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $\quad \vec{w} \in \mathrm{Im}(\phi)$, $\vec{w} = \phi(\vec{v})$

$$\underbrace{\lambda \vec{w}}_{\in \mathrm{Im}(\phi)} = \lambda \phi(\vec{v}) = \phi(\lambda \vec{v})$$

<u>Exemples 1</u>

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 3x - z \end{pmatrix}$$

$W = \mathbb{R}^2 = \mathrm{Im}(\phi)$

Si $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \vec{w} \in W$ on peut trouver $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} x+2y+z = \alpha \\ 3x - z = \beta \end{cases}$

par exemple $z = 0 \quad x = \frac{\beta}{3}$

$$\frac{\beta}{3} + 2y = \alpha \Rightarrow y = \frac{\alpha - \beta/3}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \phi\left(\begin{pmatrix} \beta/3 \\ (\alpha - \beta/3)/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

<u>Exemple 3</u>

$\phi : M \to {}^tM$

$\mathrm{Im}(\phi) = W$

$N \in W \quad N = {}^t({}^tN) = \phi(\underbrace{{}^tN}_{\in V})$

<u>Exemple 4</u>

$\phi : C^1 \to C^0 = W$
$f \to 3f'$

Si g est une fonction continue ($\in W$) a-t-on $g = \phi(f)$
$= 3f'$

$$\frac{g}{3} = f'$$

on peut prendre n'importe quelle primitive de $\frac{g}{3}$ pour f (infinité de solutions, qui diffèrent par une constante)

Rq si on définit

$\phi : C^1 \longrightarrow W$, fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

continûment dérivable (pas forcément continues)

$\mathrm{Im}(\phi) \neq W$

Cas où l'espace de départ V est de dimension finie

ϕ est alors déterminée par $\phi(\vec{v}_1), \dots, \phi(\vec{v}_m)$ si $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ est une base de V

Si ϕ et ψ coïncident sur $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$

$$(\phi - \psi)(\vec{v}_j) = \vec{0} = \phi(\vec{v}_j) - \psi(\vec{v}_j)$$

pour $j = 1, \dots, n$

si $\vec{v} \in V$, $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i$

$$(\phi - \psi)(\vec{v})$$
$$= (\phi - \psi)(\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n)$$
$$= \lambda_1 (\phi - \psi)(\vec{v}_1) + \dots + \lambda_n (\phi - \psi)(\vec{v}_n)$$
$$= \vec{0}$$

$(\phi - \psi)(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout $\vec{v} \in V$

donc $\phi - \psi = 0$ donc $\phi = \psi$

⚠ W n'est pas forcément de dimension finie

Par contre $\mathrm{Im}(\phi)$ l'est

$\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Vect}(\phi(\vec{v}_1), \dots, \phi(\vec{v}_n))$

donc on peut se ramener au cas où W est de dimension finie.

Soit $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$ une base de W

On peut définir la matrice de ϕ dans les bases $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ de V et $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$ de W

$$\mathrm{Mat}(\phi) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \phi(\vec{v}_1) & \cdots & \phi(\vec{v}_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{w}_1 \\ \vdots \\ \vec{w}_m \end{array} \end{array}$$

Exemple 1

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 3x-z \end{pmatrix}$$

base de V $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

base de W $\vec{w}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{w}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\phi(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\phi(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\phi(\vec{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Mat}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Théorème du rang

Si V est un espace vectoriel de dimension finie, alors

$$\dim(V) = \dim \mathrm{Ker}(\phi) + \dim \mathrm{Im}(\phi)$$

Idée de preuve : calcul simultané de $\mathrm{Ker}(\phi)$ et $\mathrm{Im}(\phi)$ à partir de la matrice de ϕ dans une base de V et une base de W (ou de $\mathrm{Im}(\phi)$ si W n'est pas de dimension finie)

On travaille sur ${}^tM$

sur l'exemple

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \phi(\vec{v}_1) \\ \phi(\vec{v}_2) \\ \phi(\vec{v}_3) \end{array}$$

en général on travaille sur la matrice dont les lignes sont les coordonnées de $\phi(\vec{v}_1)$ à $\phi(\vec{v}_n)$

$$\begin{array}{l} \phi(\vec{v}_1) \\ \vdots \\ \phi(\vec{v}_n) \end{array} \begin{pmatrix} - - - - - \\ \\ - - - - - \end{pmatrix}$$

Algorithme du pivot de Gauss

$\to$ forme triangulaire

Une combinaison linéaire de lignes revient à une combinaison linéaire de vecteurs.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \phi(\vec{v}_1) \\ \phi(\vec{v}_2 - 2\vec{v}_1) \\ \phi(\vec{v}_3 - \vec{v}_1) \end{array}$$

$$\phi\left(3(\vec{v}_3 - \vec{v}_1) - 2(\vec{v}_2 - 2\vec{v}_1)\right) \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \phi(\vec{v}_1) \\ \phi(\vec{v}_2 - 2\vec{v}_1) \\ 3L_3 - 2L_2 \end{array}$$

$\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \right)$

$\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Vect}\left(3\vec{v}_3 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_1 \right)$

A la fin de Gauss les lignes non nulles ce sont les coordonnées d'une base de $\mathrm{Im}(\phi)$

les lignes nulles correspondent à des vecteurs formant une base de $\mathrm{Ker}(\phi)$

Le nombre total de lignes $= \dim(V) = \dim \mathrm{Im}(\phi) + \dim \mathrm{Ker}(\phi)$

En pratique pour trouver $\mathrm{Ker}(\phi)$ il est plus simple de résoudre $\phi(\vec{v}) = \vec{0}$

ce système a pour matrice la matrice de ϕ (non transposée)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour trouver $\mathrm{Im}(\phi)$

on cherche sa dimension

si $= \dim(W)$ alors $\mathrm{Im}\,\phi = W$

sinon on fait Gauss sur ${}^t\mathrm{Mat}(\phi)$

Si les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n\}$ c'est le vecteur colonne X

alors les coordonnées de $\phi(\vec{v})$ dans la base $\{\vec{w}_1, \dots \vec{w}_m\}$ sont obtenues par le produit de matrice

$$\mathrm{Mat}(\phi) \cdot X$$