RECTIFIABILITÉ
ANALYSE DANS LES ESPACES SINGULIERS
GÉOMÉTRIE QUASI-CONFORME ET GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

HERVÉ PAJOT
(TEXTE POUR L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES)

Le but de ce texte est de présenter mon travail de recherche de ces dernières années. Cette description est divisée en deux parties (presque) indépendantes.

Le premier sujet traité se trouve dans le prolongement direct de ma thèse. Il s'agit de l'étude des propriétés de rectifiabilité des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ à l'aide des quantités géométriques que sont les nombres β de P. Jones et la courbure de Menger. Les motivations viennent de l'analyse complexe (problème de Painlevé concernant la caractérisation des ensembles effaçables pour les fonctions holomorphes bornées) et l'analyse harmonique (continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy ou d'autres opérateurs d'intégrales singulières sur des ensembles Ahlfors-réguliers).

Dans la seconde partie, nous décrivons une suite de travaux en collaboration avec M. Bourdon. On s'y intéresse à l'existence de métriques particulières (appelées métriques de Loewner) sur le bord des espaces hyperboliques au sens de M. Gromov. D'une part, on montre que, sur le bord de certains immeubles hyperboliques, de telles métriques existent. Ceci nous permet d'établir des propriétés de rigidité de ces immeubles. D'un autre côté, on exhibe des obstructions de nature cohomologique à leur existence sur le bord de certains groupes Gromov-hyperboliques.

Les références en gras et utilisant des lettres (comme **[BP1]** par exemple) renvoient à la liste de publications qui se trouve dans la section 3, celles utilisant des chiffres (comme [1]) à la bibliographie se trouvant à la fin de ce texte. Afin d'alléger celle-ci, j'ai préféré citer des monographies dans lesquelles les références exactes de tous les articles figurant dans la suite se trouvent.

1. Rectifiabilité quantifiée et Capacité Analytique

1.1. **Le problème géométrique du voyageur de commerce.** Etant donné un sous-ensemble compact E de $\mathbb{R}^n$ et un entier $d \in \mathbb{N}$ (que l'on doit voir comme la dimension de E), existe-t-il un paramétrage "régulier" de E ? c'est-à-dire existe-t-il une application "régulière" (par exemple, lipschitzienne ou bilipschitzienne) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ telle que $E \subset f(\mathbb{R}^d)$?

Pour répondre à ce type de question, P. Jones a introduit les nombres β. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout $t > 0$, posons

$$\beta_\infty^E(x,t) = \inf_P \sup_{y \in E \cap B(x,t)} \frac{d(y,P)}{t}$$

et pour tout $q \geq 1$,

$$\beta_q^E(x,t) = \inf_P \left(\frac{1}{t^d} \int_{y \in E \cap B(x,t)} \left(\frac{d(y,P)}{t} \right)^q dH^d(y) \right)^{\frac{1}{q}}$$

où l'inf est pris sur tous les d-plans P de $\mathbb{R}^n$ et où H^d désigne la d-mesure de Hausdorff. Les nombres β mesurent en tout point et à toutes les échelles la qualité de l'approximation de E par des d-plans.

1.1.1. *Le cas $d = 1$.* On cherche ici à caractériser les sous-ensembles de courbes rectifiables. Ceci apparait comme une version géométrique du problème du voyageur de commerce, dans la mesure où on autorise le nombre de villes que doit visiter le voyageur à être infini. Les nombres β considérés mesurent l'approximation de E par des droites de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact.*
(i) E est contenu dans une courbe rectifiable Γ si et seulement si $\beta^2(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \beta_\infty^E(x,t)^2 dx \frac{dt}{t^n} < +\infty$ *(où dx représente l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue). De plus, si cette condition est satisfaite, alors il existe une constante absolue $C > 0$ telle que*

$$C^{-1}(\beta^2(E) + diam E) \leq \inf_{\Gamma \supset E} l(\Gamma) \leq C(\beta^2(E) + diam E).$$

(ii) Soit $q \in [1, +\infty]$. On suppose que E est Ahlfors-régulier de dimension 1. Alors, E est contenu dans une courbe Ahlfors-régulière si et seulement si il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in E$, tout $R \in]0, diam E[$,

$$\int_{y \in E \cap B(x,R)} \int_0^R \beta_q^E(y,t)^2 dH^1(y) \frac{dt}{t} \leq CR.$$

La partie (i) est due à P. Jones [8] pour le cas $n = 2$, alors que le sens direct est du à K. Okikiolu [15] dans le cas général. On rappelle qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est Ahlfors-régulier de dimension 1 s'il existe $C_0 > 0$ tel que

$$C_0^{-1} R \leq H^1(E \cap B(x,r)) \leq C_0 R$$

pour tout $x \in E$, tout $R \in]0, \mathrm{diam} E[$. La partie (ii) du théorème 1 est due à G. David et S. Semmes [7]. La condition sur les β est de type Carleson. Un ensemble vérifiant cette condition est appelée "uniformément rectifiable". Une preuve de (ii) utilisant des arguments similaires à ceux de P. Jones pour démontrer la partie (i) est donnée dans **[P1]**, mais cette preuve ne s'applique pas au cas des ensembles de dimension plus grande que 1. En utilisant (entre autres) le théorème 1 (ii) et des théorèmes de recouvrement par des ensembles Ahlfors-réguliers, il est donné dans **[P4]** des conditions quantitatives de rectifiabilité.

Théorème 2. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact avec $H^1(E) < +\infty$ et soit $q \in [1, +\infty]$.*
(i) Si pour H^1-presque tout $x \in E$, $\int_0^{+\infty} \beta_q^E(x,t)^2 \frac{dt}{t} < +\infty$ et $\liminf_{t\to 0} \frac{H^1(E \cap B(x,t))}{2t} > 0$, alors E est 1-rectifiable.
(ii) On suppose de plus que E est Ahlfors-régulier de dimension 1. Alors, E est 1-rectifiable si et seulement si $\int_0^{+\infty} \beta_q^E(x,t)^2 \frac{dt}{t} < +\infty$ pour H^1-presque tout $x \in E$.

On rappelle qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est dit 1-rectifiable s'il existe une famille (au plus) dénombrable d'applications Lipschitziennes $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ telles que $H^1(E \setminus \cup_j f_j(\mathbb{R})) = 0$.

1.1.2. *Le cas $d > 1$.* A notre connaissance, la seule version en dimensions supérieures du théorème 1 (i) est celle démontrée dans **[P0]** qui est vraie seulement pour $d = 2$ et dont les principales idées de la preuve sont exposées dans **[P2]**. On cherche ici à donner des conditions pour qu'un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ soit contenu dans une surface "regulière" $f(\mathbb{R}^2)$. Ainsi, dans les nombres β considérés, on mesure l'approximation de E par des plans P de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 3. *Soit E un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.*
Si $\beta^2(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \beta_\infty^E(x,t)^2 dx \frac{dt}{t^{n-1}} < +\infty$, alors il existe un paramétrage $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ tel que, si on note $\Gamma = f(\mathbb{R}^2)$, on ait (pour une constante absolue $C > 0$)
(i) $E \subset \Gamma$;
(ii) $H^2(\Gamma) \leq C(\beta^2(E) + diam E)$;
(iii) Pour tout $w \in \mathbb{R}^n$, tout $t > 0$,

$$H^2(f^{-1}(B(w,t))) \leq C \left(\exp \left(\sum_{\{n; 2^{-n} > t\}} C \beta_\infty^E (w, C2^{-n})^2 \right) \right) t^2;$$

(iv) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que f soit localement ε-Hölderienne.

Par ailleurs, il existe des analogues pour toutes les dimensions d du théorème 1 (ii) et du théorème 2 (voir [7] et **[P4]** respectivement). Dans ce cas, dans la définition des β, on mesure l'approximation de l'ensemble par des d-plans.

1.2. **Nombres beta et courbure de Menger.** On va maintenant introduire une autre quantité géométrique qui permet de "mesurer la platitude" d'une mesure ou d'un ensemble du plan.

Soient x, y et z trois points non alignés de $\mathbb{C}$. On note $R(x,y,z)$ le rayon du cercle circonscrit au triangle dont les sommets sont x, y et z. La courbure de Menger de x, y et z (que l'on note $c(x,y,z)$) est definie par $c(x,y,z) = \frac{1}{R(x,y,z)}$. Si les points x, y et z sont alignés, alors on pose $c(x,y,z) = 0$.

Si μ est une mesure de Radon positive dans $\mathbb{C}$, on définit sa courbure de Menger (notée $c^2(\mu)$) par

$$c^2(\mu) = \int_{\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}} c(x,y,z)^2 d\mu(x)d\mu(y)d\mu(z).$$

Tout comme les nombres β, la courbure de Menger permet de donner des conditions quantitatives de rectifiabilité. Ainsi, G. David et J. C. Léger [12] ont montré que si E est un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$ avec $H^1(E) < +\infty$ et $c^2(H^1_{\lfloor E}) < +\infty$ (où $H^1_{\lfloor E}$ est la restriction de H^1 à E), alors E est 1-rectifiable.

On va maintenant montrer que l'on peut "comparer" les nombres β et la courbure de Menger. En s'inspirant de résultats non publiés de P. Jones, il est démontré dans **[PT]** les estimations suivantes.

Théorème 4. *Soit μ une mesure de Radon positive à support compact. On suppose que μ est à croissance linéaire, c'est à dire qu'il existe $C_0 > 0$ telle que $\mu(D) \leq C_0 \mathrm{diam} D$ pour tout disque D de $\mathbb{C}$.*
(i) Si le support de μ est contenu dans un ensemble uniformément parfait Γ, alors $c^2(\mu) \leq C \int_{\mathbb{C}}\int_0^{+\infty} \beta^{\Gamma}_{\infty}(x,t)^2 d\mu(x)\frac{dt}{t}$ où $C > 0$ ne dépend que de C_0 et de Γ.
(ii) Si le support de μ est contenu dans une courbe Ahlfors-régulière Γ, alors $c^2(\mu) \leq C\mu(\mathbb{C})$ où $C > 0$ ne dépend que de C_0 et de la constante de régularité de Γ.

On rappelle qu'un ensemble Γ de $\mathbb{C}$ est uniformément parfait s'il existe $C \geq 1$ tel que pour tout $x \in \Gamma$, tout $R \in]0, \mathrm{diam}\Gamma[$, $B(x,R) \setminus B(x, C^{-1}R) \neq \emptyset$. Par exemple, une courbe rectifiable est uniformément parfaite et dans ce cas-là, d'après le théorème 1, la conclusion de (i) peut aussi s'écrire $c^2(\mu) \leq Cl(\Gamma)$. Il est aussi montré dans **[PT]** que l'estimation de $c^2(\mu)$ obtenue dans (ii) n'est pas vraie si Γ est une courbe rectifiable générale.

Réciproquement, on peut contrôler les nombres β par la courbure de Menger dans le cas Ahlfors-régulier.

Théorème 5. *Soit E un ensemble Ahlfors-régulier de dimension 1. Alors, pour toute boule B de $\mathbb{C}$,*

$$\int_{E\cap B}\int_0^{\mathrm{diam} B} \beta^E_{\infty}(x,t)^2 dH^1(x)\frac{dt}{t} \leq C \int\int\int_{(E\cap B)^3} c(x,y,z)^2 dH^1(x)dH^1(y)dH^1(z)$$

où $C > 0$ ne dépend que la constante de régularité de E.

Le théorème 5 a été annoncé par P. Jones lors d'une série d'exposés faits a l'Université Autonome de Barcelone. Il n'en a jamais publié de preuve (pas même sous forme de préprint). On peut en trouver une dans **[P5]**.

1.3. **Le problème de Painlevé.** Soit E un ensemble compact de $\mathbb{C}$. On dira que E est effaçable pour les fonctions holomorphes bornées si pour tout ouvert U contenant E, toute fonction holomorphe bornée $f : U \setminus E \to \mathbb{C}$ admet une extension analytique dans U tout entier. Par exemple, le théorème classique de Riemann sur les singularités effaçables dit qu'un singleton est effaçable (au sens précédent). Ce que l'on appelle le "Problème de Painlevé" consiste à donner une caractérisation métrique et/ou géométrique de ces ensembles effaçables. Dans les années 40, L. Ahlfors [1] a introduit la capacité analytique de E :

$$\gamma(E) = \sup\{|f'(\infty)|; f : \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{C} \text{ est analytique et bornée avec } ||f||_\infty \leq 1\}$$

(où $f'(\infty) = \lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty))$) et il a montré que le compact E est effaçable si et seulement si $\gamma(E) = 0$. Cependant, l'étude de la capacité analytique n'est pas aisée. Ainsi, jusqu'aux travaux récents de X. Tolsa [18], on ne savait pas si elle était semi-additive.

Les progrès sur le problème de Painlevé ont été très lents jusqu'au début des années 1990. La redécouverte par M. Melnikov de la courbure de Menger a permis de mieux comprendre le comportement de l'opérateur de Cauchy sur des ensembles Alhfors-réguliers. Par suite, de nombreux problèmes ouverts concernant la capacité analytique ont été résolus. On résumera ce qui est connu sur le problème de Painlevé par le théorème suivant.

Théorème 6. *Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$.*
(i) Si $H^1(E) = 0$, alors E est effaçable.
(ii) Si la dimension de Hausdorff de E (que l'on note $dim_H E$) est strictement plus grande que 1, alors E n'est pas effaçable.
(iii) Si $H^1(E) < +\infty$, alors E est effaçable si et seulement si $H^1(E \cap \Gamma) = 0$ pour toute courbe rectifiable Γ de $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire E est purement non rectifiable).
(iv) E n'est pas effaçable si et seulement si E supporte une mesure de Radon positive qui est à croissance linéaire et à courbure finie.

Pour démontrer (i), il suffit de remarquer que la condition $H^1(E) = 0$ implique que l'on peut entourer E par un nombre fini de courbes C^1 dont la somme des longueurs est aussi petite que l'on veut et on conclut en utilisant la formule de Cauchy. Une version de (i) est énoncée dans la thèse de P. Painlevé [16], ce qui justifie l'origine du nom "Problème de Painlevé".
Si E est comme dans (ii), d'après le lemme de Frostman, pour un d tel que $1 < d < \dim_H E$, l'ensemble E supporte une mesure de probabilité μ telle que $\mu(B) \leq C(\mathrm{diam} B)^d$ pour toute boule B de $\mathbb{C}$. Alors, la fonction $\frac{1}{z} * \mu$ est holomorphe bornée hors de E, mais ne peut être prolongée analytiquement sur E.
Le sens direct de (iii) s'appelait la conjecture de Denjoy et est une conséquence non triviale de la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les graphes Lipschitziens (Théorèmes de Calderon et de Coifman-Mc Intosch-Meyer) et d'un argument de dualité utilisant Hahn-Banach. L'autre sens s'appelait la conjecture de Vitushkin et a été démontré par P. Mattila, M. Melnikov et J. Verdera [13] dans le cas Ahlfors-régulier comme une conséquence de leur caractérisation des ensembles Ahlfors réguliers sur lesquels l'opérateur de Cauchy est borné au sens L^2 et de travaux précédents de M. Christ. Il a été étendu au cas d'ensembles dont la densité inférieure est non nulle

presque partout dans **[P3]**. Le cas général a été résolu par G. David [6].
La partie (iv) est un résultat très récent de X. Tolsa [18].

La question naturelle est de déterminer si (iv) donne bien une solution complète au problème de Painlevé. Il me semble d'autant plus difficile de répondre à cette question que Paul Painlevé n'a jamais (à notre connaissance) donné un énoncé précis du problème qui porte son nom ! Cependant, on peut imaginer deux "tests", c'est à dire deux problèmes ouverts concernant l'effaçabilité pour les fonctions holomorphes bornées. Ces deux questions sont de nature métrique et géométrique. Si on arrivait à y répondre grace au théorème 6 (iv), cela nous conforterait dans l'idée que la solution de Tolsa est une bonne solution au problème de Painlevé.

Question 1 : Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$. On suppose que Fav(E) > 0. Alors, E est-il non effaçable ?

Ici, $\mathrm{Fav}(E)$ est la longueur de Favard de E et est définie par $\mathrm{Fav}(E) = \int_0^\pi |P_\theta(E)| d\theta$ où P_θ est la projection sur la direction qui fait un angle θ avec l'axe réel et $|P_\theta(E)|$ est la mesure de Lebesgue de la projection de E sur cette direction. On sait depuis les travaux de P. Mattila, P. Jones et T. Murai que la réciproque est fausse, c'est à dire qu'il existe E non effaçable avec $\mathrm{Fav}(E) = 0$. Si $H^1(E) < +\infty$, alors la condition $\mathrm{Fav}(E) = 0$ est équivalente au fait que E soit purement non rectifiable et la réponse à la question 1 est "oui" d'après le théorème 6. Le précédent résultat de X. Tolsa permet de ramener la question 1 à la

Question 1 (bis) : Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$. On suppose que $\mathrm{Fav}(E) > 0$. Existe-t-il une mesure de Radon positive supportée par E qui est à croisssance linéaire et à courbure de Menger finie ?

Un exemple typique de compact E de $\mathbb{C}$ qui vérifie $\mathrm{Fav}(E) > 0$ est un continuum, c'est-à-dire un sous-ensemble compact connexe de $\mathbb{C}$. Dans ce cas, la réponse aux deux questions est "oui". Pour la première, c'est une conséquence (presque) immédiate du théorème de représentation de Riemann. Pour la deuxième, un plan de construction de la mesure μ cherchée avait été suggéré par P. Jones et une preuve complète a finalement été écrite dans **[P5]** (en s'inspirant de notes manuscrites d'un exposé de G. David). Dans le cas général, il ne semble pas clair que l'on puisse adapter ces arguments.

Question 2 : Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$ qui est effaçable pour les fonctions holomorphes bornées et soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un homéomorphisme bilipschitzien. Est-ce-que $f(E)$ est effaçable pour les fonctions holomorphes bornées ?

D'après le résultat de X. Tolsa, une reformulation (non équivalente) de la question 2 en termes de courbure de mesure est la suivante.

Question 2 (bis) : Soit μ une mesure de Radon positive dans $\mathbb{C}$ qui est à croissance linéaire et à courbure de Menger finie. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un homéomorphisme bilipschitzien. On note μ_f la mesure image de μ par f. Est ce que μ_f est à courbure de Menger finie ?

Notons que μ_f est à croissance linéaire. La réponse à la question 2 (bis) (et donc à la question 2) est "oui" si f est affine, ceci répond à une vieille question de T. O'Farrell. Il est clair que l'on ne peut pas espérer contrôler $c^2(\mu_f)$ seulement par $c^2(\mu)$. En effet, si μ est la restriction de la mesure de Lebesgue à l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ (et donc $c^2(\mu) = 0$), alors μ_f est supportée par une courbe corde-arc (qui est donc Ahlfors-régulière) et n'est pas à courbure de Menger nulle. Cependant, le théorème 4 donne $c^2(\mu_f) \leq C\mu(\mathbb{C})$ où $C > 0$ ne dépend que de la constante de croisssance linéaire de μ et de f. On peut donc espérer un contrôle du type $c^2(\mu_f) \leq C(\mu(\mathbb{C})+c^2(\mu))$ où $C > 0$ ne dépend que de la constante de croissance linéaire de μ et de f. Si la mesure μ est Ahlfors-régulière de dimension 1, il est montré dans **[PT]** que c'est le cas. La preuve en est assez élémentaire : puisque μ est Ahlfors-régulière et $c^2(\mu) < +\infty$, les théorèmes 1 et 5 impliquent que le support de μ est contenu dans une courbe rectifiable Γ. D'où, μ_f est supportée par une courbe rectifiable dont la longueur est comparable à $l(\Gamma)$, et donc d'après le théorème 4, puis le théorème 1, $c^2(\mu_f) \leq Cl(\Gamma) \leq C(\mathrm{diam}\Gamma + \beta^2(\Gamma))$. Or, $\mathrm{diam}\Gamma$ est comparable à $\mu(\mathbb{C})$ et $\beta^2(\Gamma)$ est contrôlé par $c^2(\mu)$ (théorème 4). Ce qui termine la démonstration.

Tous les résultats de cette partie sont repris dans le livre **[P5]** qui s'inspire d'un "graduate course" donné par l'auteur à Yale University. Une présentation plus élémentaire et plus amusante se trouve dans **[P6]** qui devrait être publié dans un numéro spécial de la collection "Panoramas et Synthèses" de la SMF à l'occasion des 100 ans de l'intégrale de Lebesgue.

2. Métriques de Loewner, Inégalités de Poincaré et Géométrie Hyperbolique

2.1. **Inégalités de Poincaré et espaces de Loewner.** Soit (X, d_X, μ_X) un espace métrique mesuré. On supposera dans toute cette partie que pour toute boule $B \subset X$, $0 < \mu_X(B) < +\infty$ et que tout couple de points de X peut être joint par une courbe rectifiable (c'est-à-dire de longueur finie).

Soit $p \geq 1$. On dit que X supporte une inégalité de Poincaré $(1,p)$ s'il existe une constante absolue $C_0 > 0$ telle que

$$\frac{1}{\mu_X(B)} \int_B |u - u_B| d\mu_X \leq C_0 \mathrm{diam} B \left(\frac{1}{\mu_X(B)} \int_B \rho^p d\mu_X \right)^{\frac{1}{p}}$$

pour tout choix de
- B boule de X,
- $u : X \to \mathbb{R}$ continue et bornée dans B,
- $\rho : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ gradient supérieur de u dans B,

et où u_B est la moyenne de u sur B. Rappelons que $\rho : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ est un gradient supérieur de u dans B si pour tout $x \in X$, tout $y \in X$, toute courbe rectifiable γ de X joignant x à y, on a $|u(x) - u(y)| \leq \displaystyle\int_\gamma \rho$. Par exemple, si $X = \mathbb{R}^n$ et si u est lisse, $\rho = |\nabla u|$ est un gradient supérieure de u. Remarquons aussi que d'aprés l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Poincaré $(1,1)$ est la plus forte, au sens où elle entraine les autres.

Soit maintenant Γ une famille de courbes dans X et soit $p \geq 1$. On définit le p-module conforme de Γ (que l'on note $\mathrm{Mod}_p(\Gamma)$) par $\mathrm{Mod}_p(\Gamma) = \inf_\rho \int_X \rho^p d\mu_X$ où l'inf est pris sur toutes les fonctions mesurables positives $\rho : X \to \mathbb{R}^+$ telles que $\inf_\gamma \int_\gamma \rho ds \geq 1$ pour toute courbe rectifiable $\gamma \in \Gamma$. Si E et F sont deux continua non réduits à un point, on note $\Gamma(E,F)$ l'ensemble des courbes de X joignant E à F et on pose $\mathrm{Mod}_p(E,F) = \mathrm{Mod}_p(\Gamma(E,F))$. Si on suppose que μ_X est Ahlfors-régulière de dimension $Q > 1$, alors on a un contrôle du module Mod_Q par dessus. Ainsi, si $0 < 2r < R$, $E \subset \overline{B(x,r)}$ et $F \subset X \setminus B(x,R)$, alors $\mathrm{Mod}_Q(E,F) \leq C \left(\log \dfrac{R}{r}\right)^{1-Q}$. Un espace de Loewner est un espace métrique pour lequel on a aussi un contrôle par dessous du Q-module. De manière plus précise, on dit que X est un espace de Loewner (de dimension Q) s'il existe un homéomorphisme croissant $\phi :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ tel que, pour tout couple de continua disjoints (et non réduits à un point) E et F de X, $\mathrm{Mod}_Q(E,F) \geq \phi(\Delta(E,F))$ où $\Delta(E,F) = \dfrac{d_X(E,F)}{\min(\mathrm{diam}E, \mathrm{diam}F)}$.

Toutes ces notions ont été introduites par J. Heinonen et P. Koskela dans [11] où ils démontrent une caractérisation des espaces de Loewner en termes d'inégalités de Poincaré.

Théorème 7. *Soit X un espace propre, Ahlfors-régulier de dimension $Q > 1$. Alors, X est un espace de Loewner si et seulement si X supporte une inégalité de Poincaré $(1,Q)$.*

Ainsi, les espaces euclidiens, les variétés riemanniennes complètes à courbure de Ricci strictement positive et à croissance du volume maximale (c'est à dire telles que le volume Riemannien μ vérifie, pour tout $x \in M$, tout $r \in]0, \mathrm{diam}M[$, $\mu(B(x,r)) \geq C^{-1} r^n$ où n est la dimension de la variété M), les groupes de Carnot (munis de leur métrique de Carnot-Carathéodory) sont des espaces de Loewner. En fait, l'existence d'inégalités de Poincaré (et donc la propriété d'être un espace de Loewner) est liée à l'existence de “bonnes” courbes. En effet, une méthode géométrique pour démontrer une inégalité de Poincaré est d'exhiber, pour tout couple de points de l'espace, un “pinceau” de courbes joignant ces points. On utilisera cette méthode dans la section 2.3. D'un autre côté, tout espace de Loewner X qui est complet et Q-régulier est quasiconvexe, c'est-à-dire qu'il existe $C_0 \geq 1$ tel que pour tout couple de points x et y de X, il existe une courbe rectifiable γ d'extrémités x et y avec $l(\gamma) \leq C_0 d_X(x,y)$. On peut alors se poser la question suivante : un espace de Loewner peut-il avoir une structure “fractale” ? Ou de manière plus précise, si X est un espace de Loewner

Q-régulier, alors Q est-il un entier ? La réponse à cette question de J. Heinonen et S. Semmes est "non". Un exemple d'un tel espace est donné dans [**BP1**], nous le décrirons dans la section 2.3.

Un homéomorphisme $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) est dit quasi-symétrique s'il existe un homéomorphisme croissant $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout x_1, x_2 et x_3 dans X, et tout $t > 0$,

$$d_X(x_1, x_2) \leq t d_X(x_1, x_3) \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \phi(t) d_Y(f(x_1), f(x_3)).$$

J. Heinonen et P. Koskela ont montré que dans un espace de Loewner, un grand nombre de propriétés des homéomorphismes quasi-symétriques de $\mathbb{R}^n$ restaient vraies. En particulier, si X et Y sont deux espaces de Loewner qui sont bornées et Q-réguliers, alors tout homéomorphisme quasi-symétrique $f : X \to Y$ est absolument continu le long de toute courbe rectifiable, sauf peut-être pour un ensemble de courbes de Q-module nul.
On définit la jauge conforme de l'espace métique (X, d) par

$$\mathcal{J}(X, d) = \{\delta \text{ métrrique sur } X ; Id : (X, d) \to (X, \delta) \text{ est quasi-symétrique}\}$$

et la dimension conforme de Pansu de (X, d) par

$$\mathrm{Cdim}(X, d) = \inf\{\mathrm{Hdim}(X, \delta); \delta \in \mathcal{J}(X, d)\}$$

où Hdim est la dimension de Hausdorff. Il est clair que la dimension conforme est un invariant de quasi-symétrie. Elle n'est pas facile à estimer. Par exemple, la dimension conforme du tapis de Siepinski n'est pas connue. Cependant, on a

Théorème 8. *Soit (X, d) un espace métrique. Si sa jauge conforme $\mathcal{J}(X, d)$ contient une métrique δ tel que $(X, \delta, \mathcal{H}_\delta)$ (où $\mathcal{H}_\delta$ est la mesure de Hausdorff associé à δ) est un espace de Loewner Q-régulier, alors $Cdim(X, d) = Q$.*

Ce théorème est du à J. Tyson. Pour les références concernant cette partie, nous renvoyons à [10].

Dans le travail en collaboration avec M. Bourdon (qui sera décrit plus précisement dans les sections 2.3 et 2.4), on s'intéresse à l'existence de métriques de Loewner sur le bord des espaces Gromov-hyperboliques que nous allons maintenant introduire.

2.2. **Structure conforme au bord d'un espace Gromov-hyperbolique.** Soit (X, d_X) un espace métrique géodésique, c'est-à-dire tel que tout couple de points de X peut être joint par une courbe rectifiable dont la longueur est égale à $d_X(x, y)$. On dit que X est Gromov-hyperbolique s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout triangle géodésique de X de sommets x, y et z, tout côté est contenu dans le δ-voisinage de l'union des deux autres. Par exemple, toute variété Riemmanienne complète simplement connexe de courbure sectionnelle négative est Gromov-hyperbolique. Notons que la Gromov-hyperbolicité est invariante par quasi-isométrie. On rappelle qu'une application $F : Z_1 \to Z_2$ entre deux espaces métriques (Z_1, d_1) et (Z_2, d_2) est une quasi-isométrie s'il existe $C > 0$, $D > 0$ tels que

$$C^{-1} d_1(\xi_1, \eta_1) - D \leq d_2(F(\xi_1), F(\eta_1)) \leq C d_1(\xi_1, \eta_1) + D$$

pour tout ξ_1, η_1 de Z_1 et $d_2(\xi_2, F(Z_1)) \leq D$ pour tout $\xi_2 \in Z_2$.
Un rayon géodésique r de X est un plongement isométrique $r : [0, +\infty[\to X$. Deux rayons géodésiques r_1 et r_2 sont dits équivalents si $\sup\{d_X(r_1(t), r_2(t)); t \in [0, +\infty[\}$ est fini. Le bord à l'infini de X, que l'on note ∂X, est l'ensemble des classes d'équivalence des rayons géodésiques partant d'une origine fixée $x_0 \in X$ (c'est-à-dire tel que $r(0) = x_0$). On définit le produit de Gromov $\{\xi|\eta\}_{x_0}$ de ξ, $\eta \in \partial X$ par $\{\xi|\eta\}_{x_0} = d_X(x_0, (\xi, \eta))$ où (ξ, η) est une géodésique dans X joignant ξ à η.
Une métrique δ sur ∂X est dite visuelle de paramètre a s'il existe $C > 0$ telle que

$$C^{-1} a^{-\{\xi|\eta\}_{x_0}} \leq \delta(\xi, \eta) \leq C a^{-\{\xi|\eta\}_{x_0}}$$

pour tout ξ, η dans ∂X. D'après un théorème de M. Gromov, de telles métriques existent toujours sur ∂X. Remarquons que si δ_1 et δ_2 sont deux métriques visuelles sur ∂X, alors $Id : (\partial X, \delta_1) \to (\partial X, \delta_2)$ est quasi-symétrique. La jauge conforme naturelle du bord d'un espace hyperbolique est la jauge conforme de $(\partial X, \delta)$ où δ est une métrique visuelle sur ∂X. On la note $\mathcal{J}(\partial X)$. De même, la dimension conforme de ∂X (que l'on note $\mathrm{Cdim}(\partial X)$) est la dimension conforme associée à la jauge $\mathcal{J}(\partial X)$.

On peut maintenant se demander si de manière générique, la jauge conforme du bord d'un espace Gromov-hyperbolique possède une métrique de Loewner. On va motiver cette question par l'étude du cas particulier des groupes Gromov-hyperboliques et montrer que dans ce cas, l'existence de telles métriques permettrait de résoudre la conjecture de Cannon.

Soit G un groupe finiment engendré et soit S une famille de générateurs de G. Alors, on dit que G est un groupe Gromov-hyperbolique si son graphe de Cayley relatif à S et muni de sa distance naturelle est un espace métrique Gromov-hyperbolique. Notons que cette définition ne dépend pas du système de générateurs considéré, puisque deux graphes de Cayley associés à deux familles différentes sont quasi-isométriques et que la notion de Gromov-hyperbolicité est invariante par quasi-isométrie. Le groupe fondamental d'une variété compacte à courbure sectionnelle constante et strictement négative est un exemple typique de groupe Gromov hyperbolique.

La conjecture de Cannon peut s'énoncer ainsi : Soit G un groupe hyperbolique dont le bord ∂G est homéomorphe à la sphère standard S^2. Alors, G est quasi-symétrique à S^2. Elle est une étape importante de la conjecture d'hyperbolisation de Thurston.

Remarque. La conjecture originale de Cannon est la suivante : Soit G un groupe hyperbolique dont le bord ∂G est homéomorphe à la sphère standard S^2. Alors, G agit par isométries de manière discrète et cocompact sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$. D'aprés les travaux de D. Sullivan, cette formulation est équivalente à la précédente.

Les travaux récents de M. Bonk et B. Kleiner [2] montrent que la solution à la conjecture de Cannon découle d'une réponse “oui” à la question suivante : Soit G un groupe Gromov-hyperbolique dont le bord est non trivial, connexe et sans point de coupure local. La jauge conforme de ∂G contient-elle une métrique de Loewner ?

On montrera dans la section 4 que la réponse est "non".

Un survol plus detaillé des relations entre géométrie conforme et géométrie hyperbolique est donné dans **[BP2]**. Pour les références concernant les espaces Gromov-hyperboliques, nous renvoyons à [5] ou [9].

2.3. **Rigidité des quasiisométries des immeubles fuchsiens.** On va décrire dans cette section les principaux résultats des articles **[BP1]** et **[BP3]**. Commençons par définir les exemples les plus simples d'immeubles hyperboliques, à savoir les immeubles $I_{p,q}$.

Théorème 9. *Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \geq 5$ et $q \geq 3$. Alors, il existe un unique 2-complexe cellulaire simplement connexe (noté $I_{p,q}$) tel que*
(i) Ses cellules sont des p-gones hyperboliques réguliers à angle droit.
(ii) Deux de ses cellules ont en commun au plus un point ou une arête.
(iii) Le link en chaque sommet est le graphe bipartite complet à $q+q$ sommets.

Nous rappelons que le link au sommet x du complexe X est le graphe L_x dont les sommets sont les arêtes de X contenant x et tel que deux sommets i et j de L_x sont joints par une arête si une face de X contient les deux arêtes représentant i et j. Ainsi, le link L_x décrit la combinatoire de X dans un voisinage de x. A partir de maintenant, une cellule de $I_{p,q}$ est appelée chambre et un appartement de $I_{p,q}$ est une copie du plan hyperbolique muni de son pavage par ses chambres. Le complexe cellulaire $I_{p,q}$ a une structure d'immeuble :

(a) deux de ses chambres c et c' de $I_{p,q}$ partagent au moins un appartement de $I_{p,q}$;
(b) Si A et A' sont deux appartements contenant c et c', alors il existe un isomorphisme cellulaire $\phi : A \to A'$ qui laisse invariant $A \cap A'$.

Soient x et x' deux points de $I_{p,q}$, alors il existe deux chambres c et c' telles que $x \in c$ et $x' \in c'$. D'après (a), il existe un appartement A contenant c et c'. On pose $d(x,x') = d_A(x,x')$ (où d_A désigne la distance dans le plan hyperbolique A). D'après (b), cette définition de d ne dépend pas du choix de A. Alors, $I_{p,q}$ muni de cette métrique d est un espace Gromov-hyperbolique.
Dans [4], M. Bourdon munit le bord de $I_{p,q}$ d'une métrique $\delta_{p,q}$ de sorte que, si on note $\mu_{p,q}$ la mesure de Hausdorff associée à $\delta_{p,q}$, l'espace métrique mesuré $(\partial I_{p,q}, \delta_{p,q}, \mu_{p,q})$ est géodésique, compact et Ahlfors-régulier de dimension $Q_{p,q} = 1 + \dfrac{\log(q-1)}{\mathrm{Argch}(\frac{p-2}{2})}$. De plus, $\delta_{p,q}$ appartient à la jauge conforme de $\partial I_{p,q}$ et $\mathrm{Cdim}\partial I_{p,q} = Q_{p,q}$.

Théorème 10 (**[BP1]**)**.** *L'espace métrique mesuré $(\partial I_{p,q}, \delta_{p,q}, \mu_{p,q})$ supporte une inégalité de Poincaré* $(1,1)$.

Donc, d'après le théorème 7, $\partial I_{p,q}$ est un espace de Loewner. Comme $Q_{p,q}$ n'est jamais un entier, le théorème 10 donne une réponse négative à la question de Heinonen et Semmes énoncée dans la section 2.1. Nous avons vu dans cette même section qu'une méthode géométrique pour démontrer une inégalité de Poincaré est d'exhiber, pour tout couple de points de l'espace, un pinceau de courbes. Illustrons ceci dans le cas du bord d'un $I_{p,q}$. Pour cela, fixons ξ, $\eta \in \partial I_{p,q}$, un appartement A dont le bord contient ξ et η et une chambre c de A contenant le point base x_0. On va oublier dans la suite les indices p et q.

Remarque. En général, une telle chambre n'existe pas. Mais, on peut changer le point base dans un voisinage de x_0 de sorte qu'il existe une chambre ayant les propriétés requises. Les deux métriques correspondantes sont alors bilipschitz équivalentes. Ce qui ne changera pas les estimations obtenues.

On note K le sous-groupe du groupe des isométries de $I_{p,q}$ qui fixe point par point c et H le sous-groupe de K qui fixe ξ et η. Alors, K et H agissent par isométries sur $\partial I_{p,q}$. Considérons la projection continue et surjective $\Pi : K \times \partial A \to \partial I_{p,q}$ définie par $\Pi(k,s) = ks$. Alors, μ est la mesure image de $dk \times da$ par Π, où dk est la mesure de Haar de K et da est la mesure de longueur sur ∂A (en d'autres termes, μ a une structure produit). Soit $[\xi,\eta]$ le segment géodésique de ∂A joignant ξ et η. Alors, le pinceau de courbes cherché joignant ξ et η est l'ensemble des courbes $h([\xi,\eta])$, $h \in H$. L'estimation importante est qu'il existe $C > 0$ telle que

$$C^{-1}\gamma_t(H_t) \leq (\inf(t, \delta(\xi,\eta) - t))^{Q-1} \leq C\gamma_t(H_t), \tag{1}$$

où $\theta(t)$ est le point de $[\xi,\eta]$ à distance t de ξ, $H_t = H(\theta(t))$ est la fibre "au-dessus" de $\theta(t)$ et γ_t est la mesure image de dk par Π quand on se restreint à cette fibre. On obtient l'inégalité de Poincaré $(1,1)$ en intégrant (1) et en utilisant la structure produit de μ.

Théorème 11 ([BP3]). *Toute quasi-isométrie de $F : I_{p,q} \to I_{p',q'}$ est à distance bornée d'une isométrie $\phi : I_{p,q} \to I_{p',q'}$*

En particulier, ceci implique que si (p,q) et (p',q') sont différents, alors les immeubles $I_{p,q}$ et $I_{p',q'}$ ne sont pas quasi-isométriques. On rappelle que la conclusion du théorème dit que $\sup\{\delta_{p',q'}(F(x),\phi(x)); x \in I_{p,q}\} < +\infty$. Signalons que les théorèmes 10 et 11 sont vrais pour une classe plus large d'immeubles hyperboliques, à savoir les immeubles fuchsiens à angle droit (voir [**BP3**]).

Nous allons maintenant donner une idée de la preuve. Pour simplifier, on va supposer que $p = p'$ et $q = q'$, et on oublie les indices. Si $F : I \to I$ est une quasi-isométrie, alors F induit sur le bord de ∂I un homéomorphisme quasi-symétrique f. Réciproquemenent, tout homéomorphisme quasi-symétrique $f : \partial I \to \partial I$ est induit par une quasi-isométrie de I. Ceci provient d'un résultat de F. Paulin. Il en résulte que notre démonstration va consister à montrer que tout homéomorphisme quasi-symétrique de ∂I est "conforme" (théorème de type Rademacher-Stepanov) puis que tout homéomorphisme conforme sur ∂I est induit par une isométrie de I (théorème de type Liouville). Cette démarche est inspirée par les travaux de G. D. Mostow [14] sur la rigidité des espaces symétriques et elle est identique à celle utilisée par P. Pansu [17] pour démontrer la rigidité des quasi-isométries des espaces hyperboliques quaternioniens.

Soit $f : \partial I \to \partial I$ un homéomorphisme quasi-symétrique. Nous avons vu dans la section 2.1 qu'alors f est absolument continue le long de presque (au sens du Q-module) toute courbe rectifiable de ∂I. Fixons maintenant $\xi \in \partial I$ et soit ∂A le bord d'un appartement contenant ξ. Considérons s la paramétrisation par longueur d'arc de ∂A telle que $s(0)=\xi$. On dit que f est différentiable en ξ le long de ∂A si $\lim_{t\to 0}\frac{\delta(f(s(t)),f(s(0)))}{|t|}$ existe et est fini. Dans ce cas, on la note $f'_{\partial A}(\xi)$. Supposons que le long de tout bord d'appartement ∂A contenant ξ, f est différentiable en ξ. Alors, il existe $f'(\xi)\in\mathbb{R}^+$ tel que $f'(\xi)=f'_{\partial A}(\xi)$ pour tout choix possible de A. Ceci provient de l'observation suivante : si $\xi\in\partial A\cap\partial B$, alors il existe ∂C contenant ξ tel que ∂C coincide à droite de ξ avec ∂A (respectivement à gauche de ξ avec ∂B). En utilisant cette remarque, l'absolue continuité de f et la structure produit de μ, on montre que pour μ-preque tout $\xi\in\partial I$, il existe $f'(\xi)\in]0,+\infty[$ telle que $f'(\xi)=f'_{\partial A}(\xi)$ pour tout bord d'appartement ∂A contenant ξ.

En utilisant la structure de l'ensemble des géodésiques de ∂I et en adaptant la preuve classique du théorème de Rademacher-Stepanov dans $\mathbb{R}^n$, on démontre que f est conforme, c'est à dire que pour μ-presque tout $\xi\in\partial I$, $f'(\xi)=L_f(\xi)=l_f(\xi)$ où

$$L_f(\xi)=\limsup_{r\to 0}\frac{\sup\{\delta(f(\xi),f(\eta));\delta(\xi,\eta)\le r\}}{r}$$

$$l_f(\xi)=\liminf_{r\to 0}\frac{\inf\{\delta(f(\xi),f(\eta));\delta(\xi,\eta)\ge r\}}{r}.$$

La dernière étape consiste à prouver un théorème de type Liouville en utilisant le birapport de J. Ferrand et un critère à la Sullivan.

2.4. **Cohomologie l_p des groupes Gromov-hyperboliques.** Dans **[BP4]**, sous certaines hypothèses naturelles sur un espace métrique compact Z, on définit la cohomologie l_p de la jauge conforme $\mathcal{J}$ de Z et on démontre que si cette jauge contient une métrique de Loewner, la dimension critique de cohomologie l_p de $\mathcal{J}$ est égale à la dimension conforme de $\mathcal{J}$. On en déduit qu'il existe des groupes Gromov-hyperboliques dont la jauge conforme ne contient pas de métrique de Loewner. Donc, la réponse à la question de Bonk et Kleiner énoncée dans la section 2.2 est "non". On va maintenant décrire plus précisement ces résultats.

Soit (Z,d) un espace métrique compact. Dans toute cette partie, on suppose que
(i) Z est uniformément parfait, c'est à dire qu'il existe $C_0>0$ telle que, pour tout $z\in Z$, tout $r\in]0,\mathrm{diam}Z[$, $B(z,r)\setminus B(z,C_0^{-1}r)\neq\emptyset$.
(ii) Z porte une mesure doublante μ, c'est à dire il existe $C_1>0$ tel que $\mu(B(z,2r))\le C_1\mu(B(z,r))$ pour tout $z\in Z$, tout $r\in]0,\mathrm{diam}Z[$.

Remarquons que ces propriétés sont invariantes par quasi-symétrie et donc vérifiées par toutes les métriques de la jauge conforme de (Z,d). Notons aussi que le bord d'un groupe Gromov-hyperbolique muni d'une métrique visuelle satisfait (i) et (ii). Ceci est un résultat de M. Coornaert.

On va maintenant associer à (Z,d) un graphe qui sera Gromov-hyperbolique et dont le bord sera Z. Supposons que $\mathrm{diam}Z=1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère une collection finie de points z_i^n, $i=1,..,k_n$ telle que

- $d(z_i^n, z_j^n) \geq e^{-n}$ si $i \neq j$;
- $Z = \cup_{i=1}^{k_n} B(z_i^n, e^{-n})$.

On pose $B_i^n = B(z_i^n, e^{-n})$ et on note S_n l'ensemble des boules B_i^n, $i = 1, .., k_n$ (c'est-à-dire les boules de la génération n).

Soit G_d le graphe construit de la façon suivante :

(i) Ses sommets sont les boules B_i^n, $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, .., k_n$;

(ii) Deux de ses sommets B et B' sont joints par une arête si $B \cap B' \neq \emptyset$ et s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que B, $B' \in S_n$ ou $B \in S_n$ et $B' \in S_{n+1}$.

Notons que, puisque μ est doublante, le graphe G_d est à valence bornée. Nous montrons alors que G_d est hyperbolique au sens de Gromov et que son bord s'identifie avec Z. Pour le dernier point, il suffit de voir qu'un rayon géodesique de G_d est une suite de boules B_n de Z telles que $B_n \cap B_{n+1} \neq \emptyset$ et telles que la suite des rayons tend vers 0. De plus, d est une métrique visuelle de paramètre e. Si d' est une métrique dans $\mathcal{J}(Z, d)$, alors les graphes G_d et $G_{d'}$ associés à d et d' respectivement sont quasi-isométriques. Ceci provient du fait que Z est uniformément parfait et d'un résultat récent de Bonk-Heinonen-Koskela [3] qui généralise le résultat de F. Paulin utilisé dans la section 2.3.

De manière classique, on peut associer canoniquement au graphe hyperbolique G_d un complexe géométrique simplicial uniformément contractile X_d, appelé complexe de Rips, et on peut définir les groupes de cohomologie l_p ($p \in [1, +\infty]$) de G_d comme ceux (définis classiquement en topologie algébrique) de X_d. Si $d' \in \mathcal{J}(Z, d)$, comme G_d et $G_{d'}$ sont quasi-isométriques, il en est de même des complexes de Rips X_d et $X_{d'}$. D'où, les groupes de cohomologie l_p de X_d et $X_{d'}$ sont isomorphes. On définit les groupes de cohomologie l_p de la jauge conforme de (Z, d) comme étant les groupes de cohomologie l_p de X_d (et donc de G_d). On les note $l_pH^\alpha(\mathcal{J}(Z, d))$. D'après ce qui précède, à isomorphisme près, cette définition ne dépend pas du choix de la métrique dans $\mathcal{J}(Z, d)$. Notons que si Z est le bord d'un groupe Gromov-hyperbolique Γ, alors la cohomologie de $\mathcal{J}(Z, d)$ se confond avec la cohomologie usuelle de Γ.

On s'intéresse plus particulièrement au cas $\alpha = 1$. Alors, à isomorphisme près,

$$l_pH^1(\mathcal{J}(Z, d)) = \{f : V(G_d) \to \mathbb{R}; df \in l_p(E(G_d))\}/(l_p(V(G_d)) + \mathbb{R}),$$

où $V(G_d)$ (respectivement $E(G_d)$) est l'ensemble des sommets (respectivement des arêtes) de G_d et $df(e) = f(e_+) - f(e_-)$ où e est une arête orientée de G_d d'extrémités e_+ et e_-. On définit la dimension l_p critique de $\mathcal{J}(Z, d)$ par

$$p(\mathcal{J}(Z, d)) = \inf\{p \in [1, +\infty[; l_pH^1(\mathcal{J}(Z, d)) \neq \{0\}\}.$$

La dimension l_p critique est un invariant de quasi-symétrie, tout comme la dimension conforme de Pansu. Une question naturelle est de déterminer sous quelle(s) condition(s) ces deux invariants coincident.

A partir de maintenant, on suppose que Z est Q-régulier. On définit le p-espace de Besov de (Z,d) (que l'on note $B_p(d)$) par

$$B_p(d) = \{u : Z \to \mathbb{R} \text{ mesurable } ; ||u||_{p,d} < +\infty\}/\mathbb{R},$$

où $||u||_{p,d}$ est la norme définie par

$$||u||_{p,d} = \left(\int_{Z\times Z} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{2Q}} d\mu(x)d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Notons que si Z est la sphère standard S^n, alors $B_p(d)$ correspond à l'espace de Besov classique $B^{\frac{n}{p}}_{p,p}(S^n)$.

Théorème 12 (**[BP4]**). *Sous les hypothèses précedentes sur (Z,d), pour $p \in [1,+\infty[$, il existe un isomorphisme d'espaces de Banach entre $l_pH^1(\mathcal{J}(Z,d))$ et $B_p(d)$.*

Expliquons rapidement comment une fonction dans $l_pH^1(\mathcal{J}(Z,d))$ induit sur Z une fonction dans $B_p(d)$, et vice-versa. Soit $f \in l_pH^1(\mathcal{J}(Z,d))$ et soit r un rayon géodésique. On pose $f_\infty(r) = \lim_{n\to+\infty} f(r(n))$. Remarquons que cette limite ne dépend pas du choix du représentant dans la classe de r. Réciproquement, soit $g \in B_p(d)$. On définit f sur G_d par $f(B) = \frac{1}{\mu(B)}\int_B g(z)d\mu(z)$ pour toute boule B sommet de G_d. Pour montrer que $f \in l_pH^1\mathcal{J}(Z,d)$, on utilise l'estimation suivante :

$$C^{-1}\frac{1}{d(\xi,\eta)^{2Q}} \leq \sum_{e\in E(G_d)} \frac{\chi_{B(e_-)}(\xi)\chi_{B(e_+)}(\eta)}{\mathcal{H}(B(e_-))\mathcal{H}(B(e_+))} \leq C\frac{1}{d(\xi,\eta)^{2Q}}$$

où e est une arête orientée de G_d d'extrémités e_+ et e_-, et $B(e_+)$ (respectivement $B(e_+)$) est la boule de Z correspondante à e_+ (respectivement e_-).
Signalons qu'un des ingrédients de la preuve du théorème 12 est une version discrète de l'inégalité de Strichartz. Fixons $a > 1$. Alors, il existe $C > 0$ telle que pour toute suite $(u_n) \in l_1(\mathbb{N})$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k\geq n} u_k\right|^p a^n \leq C\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^p a^n.$$

Ceci permet de montrer que si $f_\infty = 0$ presque partout sur Z, alors $f \in l_p(V(G_d))$.

Si $p > Q$, les fonctions lipschitziennes de Z sont dans $B_p(d)$. Donc, $p(\mathcal{J}(Z,d)) \leq Q$.

Théorème 13 (**[BP4]**). *Sous les hypothèses précédentes sur (Z,d), si la jauge conforme de (Z,d) contient une métrique de Loewner, alors $B_p(d) \neq \{0\}$ si et seulement si $p > Q$. En particulier, $p(\mathcal{J}(Z,d)) = Cdim(\mathcal{J}(Z,d))$.*

Notons que la conclusion du théorème 13 provient de ce qui précède et du théorème 8. Comme application, on montre qu'il existe des groupes Gromov-hyperboliques (qui sont des produits amalgamés de groupes Gromov-hyperboliques bien choisis) pour lesquels la dimension l_p critique et la dimension conforme du bord ne coincident pas. D'où, la jauge conforme du bord de ces groupes hyperboliques ne possède pas de métrique de Loewner.

3. Publications et Travaux

[P0] H. Pajot, *Etude des propriétés de rectifiabilité des sous-ensembles de* $\mathbb{R}^n$, Thèse, Université Paris-Sud (1996).

[P1] H. Pajot, *Sous-ensembles de courbes Ahlfors-régulières et nombres de Jones*, Publications Matematices, Volume 40 (1996), p 497-526.

[P2] H. Pajot, *Un théorème géométrique du voyageur de commerce en dimension 2*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Tome 323 (1996), Série I, p 13-16.

[P3] H. Pajot, *Théorème de recouvrement par des ensembles Ahlfors-réguliers et capacité analytique*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Tome 323 (1996), Série I, p 133-135.

[P4] H. Pajot, *Conditions quantitatives de rectifiabilité*, Bulletin de la Société Mathématique de France, Volume 125 (1997), p 1-39.

[BP1] M. Bourdon, H. Pajot, *Poincaré inequalities and quasiconformal structure on the boundary of some hyperbolic buildings*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 127 (1999), p 2315-2324.

[BP2] M. Bourdon, H. Pajot, *Rigidity of quasi-isometries for some hyperbolic buildings*, Commentarii Mathematici Helvetici, Volume 75 (2000), p 701-736.

[BP3] M. Bourdon, H. Pajot, *Quasi-conformal geometry and hyperbolic geometry*, in "Rigidity in Dynamics and Geometry", edited by M. Burger and A. Iozzi, Springer (2002), p 1-15.

[BP4] M. Bourdon, H. Pajot, *Cohomologie* l_p *et espaces de Besov*, à paraitre dans Journal für die Reine und Angewandte Mathematik.

[P5] H. Pajot, *Analytic capacity, rectifiability, Menger curvature and the Cauchy integral*, Lecture Notes in Mathematics Volume 1799, Springer (2002).

[PT] H. Pajot, T. Toro, *Some remarks about Menger curvature, Peter Jones'* β *numbers and bilipschitz homeomorphisms*, preprint.

[P6] H. Pajot, *Le problème géométrique du voyageur de commerce, et ses applications à l'analyse complexe et harmonique*, preprint.

Références

[1] L. Ahlfors, *Bounded analytic functions*, Duke Mathematical Journal Volume 14 (1947), p 1-11.

[2] M. Bonk, B. Kleiner, *Quasisymmetric parametrizations of two-dimensionnal metric spheres*, à paraitre dans Inventiones Mathematicae.

[3] M. Bonk, J. Heinonen, P. Koskela, *Uniformizing Gromov hyperbolic spaces*, Astérisque 270 (2001).

[4] M. Bourdon, *Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow*, Geometric And Functional Analysis Volume 7 (1997), p 245-268.

[5] M. Coornaert, T. Delzant, A. Papadopoulos, *Géométrie et théorie des groupes, Les groupes hyperboliques de Gromov*, Lecture Notes in Mathematics Volume 1441 (1990), Springer-Verlag.

[6] G. David, *Unrectifiable* 1*-sets have vanishing analytic capacity*, Revista Matematica Iberoamericana Volume 14 (1998), p 369-479.

[7] G. David, S. Semmes, *Singular integrals and rectifiable sets in* $\mathbb{R}^n$ *: Au-delà des graphes lipschitziens*, Astériques 193 (1991).

[8] P. W. Jones, *Rectifiable sets and the traveling salesman problem*, Inventiones Mathematicae Volume 102 (1990), p 1-15.

[9] E. Ghys, P. de la Harpe, *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics Volume 83 (1990), Birkhauser.

[10] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, Springer (2001).

[11] J. Heinonen, P. Koskela, *Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry*, Acta Matematica Volume 181 (1998), p 1-61.

[12] J.C. Léger, *Rectifiability and Menger curvature*, Annals of Mathematics Volume 149 (1999), p 831-869.

[13] P. Mattila, M. Melnikov, J. Verdera, *The Cauchy integral, analytic capacity, and uniform rectifiability*, Annals of Mathematics Volume 144 (1996), p 127-136.

[14] G. D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Annals of Mathematical Studies Volume 78, Princeton University Press (1973).

[15] K. Okikiolu, *Characterisation of subsets of rectifiable curves in* $\mathbb{R}^n$, Journal of the London Mathematical Society Volume 46 (1992), p 336-348.

[16] P. Painlevé, *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (1888).

[17] P. Pansu, *Métriques de Carnot-Carathéoddory et quasiisométries des espaces symétriques de rang* 1, Annals of Mathematics Volume 129 (1989), p 1-60.

[18] X. Tolsa, *Painlevé's problem and the semiadditivity of analytic capacity*, à paraitre dans Acta Mathematica..

Université de Cergy-Pontoise, Département de mathématiques, 2 Avenue Adolphe Chauvin, BP 222 Pontoise, 95302 Cergy-Pontoise cédex, France

E-mail address: herve.pajot@math.u-cergy.fr