Université de Cergy-Pontoise
Département de Mathématiques
2001-2002

EXERCICES DE MATHEMATIQUES

Semestre 1

Filière SV

Introduction

Ce recueil d'exercices couvre la totalité du programme de Mathématiques du module S1-SV et S1-ST. Le cours contient six chapitres, de tailles inégales, et les exercices suivent cette division :

1. Introduction, logique et langage mathématique.
2. Fonctions, limites.
3. Continuité.
4. Dérivation.
5. Fonctions réciproques.
6. Formules de Taylor, développements limités.

Pour chaque chapitre (excepté le premier), vous trouverez

- Un bref aperçu historique sur le thème abordé dans le chapitre. Si vous voulez en savoir plus, vous pouvez consulter les ouvrages suivants :
A. Dahan, J. Peiffer, *Une Histoire des Mathématiques, routes et dédales*, Le Seuil, Collection Points-Sciences.
E. Hairer, G. Wanner, *Analyse au fil de l'histoire*, Springer.

- Des questions de cours. Elles vous permettront de voir si vous avez bien assimilé le cours (une fois l'avoir revu !).

- Une liste d'exercices qui sont destinés à être faits pendant les séances de travaux dirigés. Ils sont sans doute trop nombreux, ce qui permettra aux étudiants (sérieux !) de s'entraîner davantage. N'hésitez pas à demander conseil à vos enseignants ou à votre tuteur (si vous participez au tutorat).

Une compilation de sujets d'examen et de partiel complète ce recueil.

Pour terminer, nous espérons que les inévitables erreurs qui auront résisté à une relecture attentive ne pénaliseront pas trop les utilisateurs.

1 Introduction

Exercice 1.1
Dans les expressions suivantes, on demande de :
1. Vérifier qu'elles sont correctement écrites.
2. Dire s'il s'agit de terme ou de proposition.
3. S'il s'agit d'une proposition ne dépendant pas d'une variable, dire si elle est vraie ou fausse.

$(2+3\sin =$	$\exists x \in \mathbb{N},\ x^2 = 4$	$x - x < (2 > 3)$
$1+\mathbb{R} = 2$	$A \subset \emptyset$	$1 + \big(x + (y^{1-x} + 3\big)$
$f(x^2) = 1 - f$	$\exists x \in \mathbb{R},\ (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$	$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N},\ n = 2m$
$1 + \sqrt{2 + \sqrt{3+}}$	$\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq p$	$1 + (2 + (3 + (4 + (5 + \sqrt{2}))))$
$A \subset B = \emptyset$		

Exercice 1.2
Ecrire les assertions suivantes et leurs négations avec des quantificateurs (on pourra noter M (resp. F)) l'ensemble des mathématiciens (resp. farceurs)).

1. Les mathématiciens sont tous des farceurs.
2. Les mathématiciens ne sont jamais des farceurs.
3. Il y a des mathématiciens qui ne sont pas des farceurs.
4. Il y a des farceurs qui ne sont pas des mathématiciens.
5. Certains mathématiciens sont des farceurs.

Exercice 1.3
Ecrire les assertions suivantes et leurs négations avec des quantificateurs. Dans chaque cas, dire si l'assertion est vraie ou fausse et le justifier.

1. Tout entier naturel, divisible par 6, est divisible par 3.
2. Tout entier naturel, divisible par 2 et par 3, est divisible par 6.
3. Tout entier naturel, divisible par 2 et par 14, est divisible par 28.

Exercice 1.4
Soient f_1, f_2 et f_3 des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour chacune des propriétés suivantes, écrire sa négation et illustrer graphiquement la propriété et sa négation.

1. $\forall i \in \{1,2,3\}, \exists a \in \mathbb{R}, f_i(a) = 1$
2. $\exists i \in \{1,2,3\} / \forall a \in \mathbb{R}, f_i(a) = 1$
3. $\exists a \in \mathbb{R} / \forall i \in \{1,2,3\}, f_i(a) = 1$
4. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1,2,3\}, f_i(a) = 1$

Exercice 1.5
Montrer, par récurrence :

$$\text{Pour tout réel } q \neq 1, \quad 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (1 \times 2) + (2 \times 3) + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 9 \text{ divise } 10^n - 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^3 - n}{3} \in \mathbb{N}. \quad (\text{ écrire } u_{n+1} - u_n)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(nx)| \leq n |\sin x|$$

Exercice 1.6
Placer les symboles $\Leftarrow, \Rightarrow, \Longleftrightarrow$ qui conviennent entre les propositions et écrire les contraposées des implications.

1. (a) $x \leq 0$ (b) $x < 0$
2. (a) $|x - x_0| < \alpha$ (b)$x < x_0 + \alpha$
3. (a) $\forall x, x$ vérifie la propriété P (b)$\exists x, x$ vérifie la propriété P
4. (a) $A \cap B = A$ (b) $A \subset B$
5. (a) $A \cup B = A$ (b) $B \subset A$

Exercice 1.7
Dire si (b) est une condition nécessaire, suffisante ou nécessaire et suffisante de (a).
(a) $x^2 \geq x$ (b) $x \geq 1$
(a) n est impair (b) n^2 est impair
(a) $\forall n \in \mathbb{N}, x \geq n$ (b) $x \geq 10^{10}$

Exercice 1.8
Prendre la négation des phrases suivantes :

1. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 < n + 1$
2. $\forall a \in A, \exists b \in B, a < b^2$ et $a \leq b^3 + 1$
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ |x - 1| < \alpha \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon$

Traduire à l'aide de quantificateurs $\exists! x\ P(x)$ qui signifie « il existe un et un seul x tel que $P(x)$».

Exercice 1.9
On considère l'équation suivante notée (E).

$$(x^2 + 2x - 24)(2x^2 - 13x + 15) = 0$$

Soient S l'ensemble des solutions de (E) et A et B les ensembles des solutions des équations $x^2 + 2x - 24 = 0$ et $2x^2 - 13x + 15 = 0$. Dire si les phrases mathématiques suivantes sont vraies ou fausses :

$$\mathcal{S} = A \cap B, \qquad \mathcal{S} = A \cup B, \qquad \mathcal{S} \subset \mathbb{Z},$$

$$\mathcal{S} \subset \mathbb{Q}, \qquad \mathcal{S} \cap]0, 2[= \emptyset,$$

Exercice 1.10
Soit n un entier naturel supérieur à 2. Démontrer (par contraposée) que, si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier.

Exercice 1.11
À l'aide de la formule du binôme, montrer que :

$$\sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p = 2^n, \quad \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \mathrm{C}_n^p = 0$$

Exercice 1.12
Simplifier l'expression :

$$B = \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k)$$

Exercice 1.13

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos 4z = 0$
3. Exprimer $\cos 4z$ en fonction de $\cos z$.
4. En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\cos \frac{3\pi}{8}$

Exercice 1.14
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{1}{x} > x$
2. $\dfrac{1}{x^2-1} < \dfrac{1}{x}$
3. $\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} \leq 4$
4. $||2x+3| - |x+5|| \leq |x+1|$

Exercice 1.15
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x^2-2x+3} \leq x-1$

2. $\sqrt{x-1} > 2 - \sqrt{x}$

3. $|x-3| > |2x+1|$

Exercice 1.16
Représenter dans le plan l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$|x-1| + |y-1| \leq 2$$

Rappel :
L'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) satisfont une inégalité de la forme : $ax + by + c \leq 0$ où $(a, b) \neq (0, 0)$ est un des demi-plans limités par la droite $ax + by + c = 0$.

2 Fonctions, Limites

2.1 Un bref aperçu historique

Une des plus vastes tentatives, avant le dix-neuvième siècle, pour donner à l'analyse des bases rigoureuses est celle de Lagrange dans son livre "Théorie des fonctions analytiques" (1797). Il écrit ainsi, dans la préface, qu'un de ses buts est *"de débarrasser le calcul différentiel des considérations métaphysiques d'infiniments petits ou de quantités évanouissantes"* (voir chapitre 4).
Cependant, il ne pouvait pas se passer de la notion de limite, qui n'était pas rigoureuseument définie à cette époque. Il conclut d'ailleurs sa préface par cette phrase très pessimiste :*"(il) reste peu de moyens de faire de grands progrès avec l'analyse dans l'état actuel où elle se trouve".*
Comme nous allons le voir au cours de ce semestre, les mathématiciens du siècle suivant comme Cauchy ou Weierstrass vont démentir ces propos.

Le nom "functio" (fonction) a été proposé par Leibnitz et J. Bernoulli (1718). La notation "f(x)" a été introduite par Euler (1734). La définition moderne de la notion de fonction est due à Dirichlet (1837) :
Si pour tout x, il existe un unique, fini y .... alors y est appelé une fonction de x ....".

D'Alembert définissait la notion de limite de la façon suivante dans le tome 9 de l'Encyclopédie (1765) : "*On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près qu'une grandeur donnée, si petite qu'on puisse la supposer".* Une définition plus rigoureuse est donnée par Cauchy dans son "Cours d'analyse algébrique" (1821), on lui doit aussi la notation *lim.* Le formalisme moderne avec les ε viendra après les travaux de Weierstrass et de son école dans les années 1860-1880.

2.2 Questions de cours

Vrai ou faux ?

Dans la suite, f et g sont deux fonctions de la variable réelle.

(1) Si f et g sont définies sur $\mathbb{R}^{+*}$, alors la composée $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(2) Si f et g sont deux fonctions décroissantes sur $\mathbb{R}$, alors $f \circ g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

(3) Si f est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, alors $\dfrac{1}{f}$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$.

(4) Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

(5) Si $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) > 0$.

(6) Si $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$ et si la limite de g en 2 est finie, alors $\lim\limits_{x \to 2} (fg)(x) = +\infty$.

Retour sur les définitions

(1) La proposition

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon > 0 \text{ tel que pour tout } x \in D_f, |x - x_0| \leq \varepsilon \Rightarrow f(x) > A$$

est-elle la traduction mathématique de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$? si la réponse est non, donner la proposition correcte.

(2) Reconnaitre la limite donnée par

$$\forall B < 0, \exists A_B > 0 \text{ tel que pour tout } x \in D_f, x > A_B \Rightarrow f(x) < B.$$

(3) Rappeler la définition de $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, puis de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$. En utilisant ces définitions, démontrer que $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ où $f(x) = x^2 - 1$, puis que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$ où $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

2.3 Quelques exercices

Exercice 2.1

1. On suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire, en une phrase compréhensible en français, la proposition :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha.$$

2. Que peut vouloir dire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha.$$

Exercice 2.2

Représenter graphiquement la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \longmapsto ||x| - 1|$$

En déduire les solutions de l'équation :

$$||x| - 1| = \frac{1}{2}$$

Exercice 2.3

Trouver graphiquement le nombre de solutions de l'équation $\ln x = mx$ selon les valeurs du paramètre réel m.

Remarque : On démontrera ce résultat rigoureusement dans le chapitre Continuité.

Exercice 2.4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 520 \\ \log x + \log y = 4 \end{cases}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0$.
3. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$e^x + e^{-x} = m, \quad e^x - e^{-x} = m.$$

Exercice 2.5

Soit $\mathbf{E}$ la fonction partie entière, c'est-à-dire la fonction définie par :

$$\mathbf{E}(x) \in \mathbb{Z}, \ \text{ et } \mathbf{E}(x) \le x < \mathbf{E}(x) + 1$$

pour tout x réel. Représenter graphiquement les fonctions $\mathbf{E}(x)$ et $x - \mathbf{E}(x)$.

Exercice 2.6

Soit

$$f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Simplifier $f(x)$ en distinguant les cas $x \ge 2$ et $1 \le x \le 2$. (Indication : calculer $(\sqrt{x-1}+1)^2$...)

Exercice 2.7
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$. Représenter graphiquement f ainsi que les fonctions :

$$\begin{array}{rl} x \longmapsto f(x+2) & x \longmapsto f(x)+2 \\ x \longmapsto 2f(x) & x \longmapsto f(2x) \\ x \longmapsto |f(x)| & x \longmapsto f(|x|) \end{array}$$

Exercice 2.8
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de symboles logiques les propositions suivantes :

La fonction f n'est pas constante.

2 n'est pas l'image d'un réel par f.

f prend toujours la même valeur pour des nombres opposés.

Aucun réel positif n'est égal à son image.

Exercice 2.9
Pour chaque fonction f, déterminer le domaine de définition D_f, étudier la parité et répondre aux questions.

1. $f(x) = \dfrac{\cos x + 2}{x^2+1}$. La fonction f est-elle bornée sur D_f (on ne cherchera pas à étudier les variations de f) ? Déterminer la position relative du graphe de f par rapport à celui de la fonction $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
2. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-4x^2}{2}\right)$. Pour quelles valeurs de x les points du graphe de f d'abscisse x sont-il au dessus de l'axe des abscisses ?
3. $f(x) = \dfrac{e^{-3x^2}+1}{5x+3}$. Le graphe de f intersecte-t-il l'axe des abscisses ?

Exercice 2.10
Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-x^3}{1-x^7} & \lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-4} & \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+3}-x \\ \lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{1+\dfrac{1}{x}} - \sqrt{\dfrac{1}{x}} & \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3-1} & \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin x - \frac{1}{2}}{4\cos^2 x - 3} \\ \lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} & \lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3} & \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 \frac{x}{2}} \end{array}$$

Exercice 2.11
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x+3x^2}, \qquad \lim_{x\to0} \frac{(\sin x)^4}{x^3 \ln(1+x)}, \qquad \lim_{x\to0} \frac{\sin(x^4)}{x(\tan x - \sin x)}, \qquad \lim_{x\to0} \frac{e^{4x^2}-1}{\ln(\cos x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x+1}\ln\left(1-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right), \qquad \lim_{x\to\pi} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\pi}}{\sin x}, \qquad \lim_{x\to0} \frac{x^4+3x^2+x}{2x^3+x^2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^{x^2}-5x^4}{\ln(7x^2)+2x}$$

Exercice 2.12
Etudier la limite, lorsque x tend vers l'infini, de $x(\sqrt{x^2+m}-x)$, où m est un paramètre réel.

Exercice 2.13
Calculer $\lim\limits_{x\to0} x\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et tracer le graphe de la fonction.

Exercice 2.14

Injection d'un médicament :

A. Présence du médicament dans le sang

Un médicament est injecté par voie intramusculaire. Il passe du muscle au sang, puis est éliminé par les reins. On désigne par $f(t)$ la quantité de médicament (en millilitres) contenue dans le sang à l'instant t (en heures). Une étude a permis de constater que pour tout t de $[0, +\infty[$, on a :

$$f(t) = q(e^{-0,5t} - e^{-t})$$

où $t = 0$ correspond à l'heure de l'injection et q est la quantité de médicament injectée.

1. Etudier les variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$.
2. Dresser le tableau des variations de f en précisant la limite en $+\infty$.

B. Contrôle des effets du médicament La quantité contenue dans le sang ne doit pas dépasser la valeur $s_M = 2,6$, appelée *seuil de toxicité*, et le médicament est efficace si la quantité présente dans le sang est supérieure à la valeur $s_m = 1,2$, appelée *seuil d'efficacité*.

1. Déduire de la question A, les valeurs que l'on peut donner à q pour qu'à aucun moment la quantité présente dans le sang ne dépasse s_M.
2. On suppose que $q = 10$. Dans un repère orthonormé, tracer la courbe de la fonction f obtenue dans ce cas.
3. Déterminer graphiquement l'intervalle de temps pendant lequel le médicament est efficace.

3 Continuité

3.1 Un bref aperçu historique

Pour Euler, une fonction est dite continue sur un intervalle si elle est définie sur cet intervalle par une unique "expression analytique". Ainsi, la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x$ pour $0 \leq x < \frac{1}{2}$ et $f(x) = 1 - x$ pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ n'est pas continue au sens d'Euler, mais elle est continue au sens moderne !

Cauchy (1821) introduit le concept de fonctions continues de la façon suivante :
"$f(x)$ sera fonction continue, si .... les valeurs numériques de la différence $f(x+\alpha) - f(x)$ décroit indéfiniment avec celle de α ...."
Bolzano (1817) et surtout Weierstrass (1874) étaient plus précis :
" Ici, on dit qu'une quantité y est une fonction continue de x si, après avoir choisi une quantité ε, on peut montrer l'existence d'un δ tel que, pour toute valeur comprise entre $x_0 - \delta ... x_0 + \delta$, la valeur correspondante de y reste entre $y_0 - \varepsilon .... y_0 + \varepsilon$".

Le théorème des valeurs intermédiaires a été utilisé par Euler et Gauss sans qu'une preuve rigoureuse de ce résultat ait été donnée, comme le dit Lagrange en 1807 *"Ce théorème est connu depuis longtemps"*. Ce manque a été comblé par Bolzano (1817).

Le théorème "Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes" est appelé "Hauptlehrsatz" (Théorème principal) dans les lectures de Weierstrass de 1861 et a été publié par Cantor (1870).

3.2 Questions de cours

Vrai ou faux ?

(1) La fonction f dont le graphe est de la forme

est continue en 0.

(2) La fonction "partie entière" est continue sur $\mathbb{R}$.

(3) Toute fonction continue sur $]-1,2]$ est bornée sur $]-1,2]$.

(4) Toute fonction bornée sur $[2,3]$ est continue sur $[2,3]$.

Retour sur les théorèmes du cours
Les énoncés suivants sont-ils corrects ? Si la réponse est non, les corriger.

(1) Si f est définie et strictement croissante sur $[a,b]$ avec $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors il existe un unique $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

(2) L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

(3) Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est bornée sur I et atteint ses bornes.

Exemple de raisonnement
Le raisonnement suivant est-il correct ?

Soit $f(x) = x^5 + 4x - 1$. Alors, la fonction f est continue sur $[0, 1]$, $f(0) = -1$ et $f(1) = 4$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = 2$.

3.3 Quelques exercices

Exercice 3.1
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \leq |x|$$

1. Interpréter graphiquement cette condition.
2. Montrer que f est continue en 0.
3. Donner un ou plusieurs exemples d'une telle fonction.

Exercice 3.2
1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x} - 1}{x} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 1} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

   La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x - 1} \text{ si } 0 < x < 1 \\ 2 \text{ si } x = 1 \\ \dfrac{x + 1}{3x - 1} \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

   La fonction g est-elle continue en 1 ?

Exercice 3.3
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$$

Quel est son ensemble de définition ? Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 3.4
Déterminer la valeur du réel a pour que la fonction f définie ci-dessous soit prolongeable par continuité en 0.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{\ln(1 + 3x)}{2x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 3.5
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{1 - \cos(\sin x)}$$

Étudier son ensemble de définition, et les éventuels prolongements par continuité.
Donner l'allure de la courbe représentative.

Exercice 3.6
Etudier le prolongement par continuité en 0 de la fonction f définie sur $]-1,0[\cup]0,1[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+\mid x\mid}{x^2-\mid x\mid}$.

Exercice 3.7
Déterminer le nombre de solutions de l'équation $\ln x = mx$ selon les valeurs du paramètre réel m.
Remarque : La résolution graphique a été faite dans l'exercice 2.3.

Exercice 3.8
Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0,1]$ et qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0,1]$. Montrer qu'il existe un réel α tel que $f(\alpha)=\alpha$. (Un tel réel est appelé **point fixe**). Indication : utiliser la fonction définie par :

$$g(x)=f(x)-x$$

Exercice 3.9

1. Montrer que l'équation $x^{17}=x^{11}+1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que, si P un polynôme réel de degré impair, il admet au moins une racine réelle.

Exercice 3.10
Soit n un entier naturel. Montrer que l'équation

$$x^2(\cos x)^n + x\sin x + 1 = 0$$

admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.11
En une heure, un randonneur parcourt 6 km. On admet que la fonction f où $f(x)$ désigne le nombre de kilomètres parcourus en x heure ($x\in[0,1]$) est continue sur $[0,1]$. En considérant la fonction g définie sur $[0,\frac{1}{2}]$ par $g(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$, montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel le randonneur parcourt 3 km.

Exercice 3.12
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$, et admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

4 Dérivation

4.1 Un bref aperçu historique

L'histoire de la dérivée est longue et étroitement liée à celle de la tangente. Pendant l'antiquité, la tangente est une droite qui ne touche la courbe qu'en un seul point. En utilisant la cinématique, Archimède avait construit la tangente à une spirale, tandis qu'Appolonius avait considéré le cas des coniques. Cependant, leurs travaux poursuivis par Torricelli et Roberval au XVIe sècle n'avaient débouché sur aucune méthode générale. Au cours du XVIIe siècle, le problème de la détermination de la tangente à une courbe devient important du fait de ses applications : construction d'horloge (Huygens 1673), recherche des extrema d'une fonction (Fermat 1638), vérification des lois de la gravitation en astronomie (Kepler, Newton),.........
Décrivons maintenant les approches de Leibniz et de Newton à travers l'exemple (élémentaire de nos jours) de la parabole d'équation $y = x^2$.
Si x varie de Δx, alors y devient

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

c'est-à-dire $\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.
La pente de la droite passant par (x, y) et $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ est égale à $2x + \Delta x$. D'où, quand Δx s'approche de 0, cette pente s'approche de celle de la tangente. Le problème est dans le "devient proche de 0".
Pour Leibniz (1684), on doit imaginer que Δx et Δy deviennent "infiniment petits". Alors, $(\Delta x)^2$ sera infiniment plus petit que Δx et Δy donc négligeable, et $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$.
Pour Newton (1671, mais publié en 1736), le terme $(\Delta x)^2$ doit être vu comme égal à 0 et donc $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$ (Méthode des fluxions)
Ces travaux vont être poursuivis par les Bernouilli, L'Hospital, Euler, D'Alembert,..... Une première critique des "infiniment petits" apparaît en 1734 dans un article de l'évèque Berkeley. Comme nous l'avons déja vu au chapitre 2, ils seront remis en cause par Lagrange qui avait essayé de développer l'analyse sur la base des séries de Taylor que nous allons voir au chapitre suivant. On lui doit le nom "dérivée" et la notation $\dfrac{df}{dx}$.
En 1823, Cauchy critiqua cette approche et revint aux "infiniment petits". Il faut attendre les travaux de Bolzano (1817) et surtout de Weierstass (1861) pour voir apparaître la définition de la limite avec des ε, et donc la définition rigoureuse de la dérivée.
Le théorème de Rolle est dû ... à Rolle (1690) et celui des accroissements finis à Lagrange (1797). Il est clair d'après ce que nous avons vu précédemment que la formulation initiale n'était pas celle que l'on vous a donné en cours !

4.2 Questions de cours

Vrai ou faux ?

(1) Toute fonction f dérivable en x_0 est continue en x_0.

(2) Si f est dérivable à droite et à gauche en x_0, alors f est dérivable en x_0.

(3) La dérivée de $f(x) = \cos 2x$ est $f'(x) = -\sin 2x$.

(4) Si f est dérivable sur $]0, 2[$ et si $f'(1) = 0$, alors f admet un maximum ou un minimum en 1.

Retour sur les théorèmes du cours

- Les énoncés suivants sont-ils corrects ? Si la réponse est non, les corriger.

(1) Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$, continue sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

(2) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe un unique $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- Peut-on appliquer le théorème de Rolle à la fonction $f(x) = |x|$ sur l'intervalle $[-1,1]$? Même question avec $f(x) = 5x^2 + 3$ sur $[0,1]$.

- L'interprétation graphique suivante du théorème des accroissements finis est-elle correcte ? Si la réponse est non, la corriger.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que le graphe de f admet au point $C(c, f(c))$ une tangente qui passe par les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

4.3 Quelques exercices

Exercice 4.1
Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\cos x) & h(x) &= \cos(\sin x) \\ g(x) &= \ln(x^2) & k(x) &= \ln(\ln(x)) \\ l(x) &= \frac{ax+b}{cx+d} & m(x) &= \frac{1}{1+\tan x} \\ n(x) &= \sin\left(\frac{x^2}{\cos(x^2)}\right) & o(x) &= e^{e^x} \end{aligned}$$

Exercice 4.2
Calculer f' en fonction de g' dans les différents cas suivants :

$$\begin{aligned} f(x) &= g(ax+b) \\ f(x) &= g(a+g(x)) \\ f(x) &= g(x+g(a)) \\ f(x) &= g(x+g(x)) \\ f(e^{x+2}) &= g(x^3) \end{aligned}$$

Exercice 4.3
Étudier et, s'il existe, calculer le nombre dérivé en 0 des fonctions suivantes :

$$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et } f(0) = 0$$
$$g(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et } g(0) = 0$$

Exercice 4.4
Soient g et h deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables en 0 telles que $g(0) = h(0)$. On pose

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x < 0 \\ h(x) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable en 0. (Indication : deviner la solution en raisonnant graphiquement.)

Exercice 4.5
Déterminer la dérivée n-ième des fonctions suivantes (on pourra être amené à utiliser la formule de Leibniz) :

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2} \qquad h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$
$$i(x) = 3x^k \qquad j(x) = \cos(2x) \qquad k(x) = xe^x$$
$$l(x) = \sin(x)e^{2x} \qquad m(x) = (x^3+2x-7)e^x \qquad n(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

Pour le dernier exemple, on pourra remarquer que :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

Exercice 4.6
Calculer la dérivée n-ième de la fonction définie par $f(x) = x^n(1+x)^n$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.7
1. Montrer que l'on a $x\cos x - \sin x < 0$ si $x \in]0,\pi[$.
2. Etudier le sens de variation de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $]0,\pi]$. Soient a et b des nombres réels tels que $0 < a < b \leq \pi$. Montrer que l'on a $\dfrac{a}{b} < \dfrac{\sin a}{\sin b}$.

Exercice 4.8
Soit p un entier positif.

1. Montrer que la fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{(1+x)^p}{1+x^p}$ a pour maximum 2^{p-1}.
2. Soient a et b des nombres réels positifs. Montrer que l'on a
$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p).$$

Exercice 4.9
Soit f une fonction dérivable sur $]a,b[$ avec $0 < a < b$. On suppose de plus que f est continue sur $[a,b]$ et que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f qui passe par l'origine. On pourra introduire la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice 4.10
Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

puis

$$\forall a,b \in \mathbb{R}_+^*,\ n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)a^n < \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n$$

En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(On pourra prendre $a = 1 + \frac{1}{n+1}$ et $b = 1 + \frac{1}{n}$). **Remarque** : la suite ainsi définie est donc croissante, vers quoi converge-t-elle ?

Exercice 4.11
Soit f une fonction définie et continue sur $[0,+\infty)$, dérivable sur $]0,+\infty)$, et telle que f' est croissante et $f(0) = 0$.

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $\forall x > 0,\ f(x) \leq xf'(x)$.
2. En déduire que la fonction g définie sur $]0, +\infty)$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est croissante.

Exercice 4.12
Calculer, à l'aide du théorème des accroissements finis :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$$

Exercice 4.13
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f'(0) = -1$. Montrer que :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = -1$
2. Il existe $x_1 \in]0, 1[/ f(x_1) < 0$.
3. Il existe $x_2 \in]0, 1[/ f(x_2) = 0$.
4. Il existe $x_3 \in]0, 1[/ f'(x_3) = 0$.

Exercice 4.14
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

À-t-on nécessairement :

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$$

Réciproque ?

Exercice 4.15
Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[0, 1]$, dérivables sur $]0, 1[$ et telles que :

$$f(0) = g(0) \text{ et } f(1) = g(1)$$

On va montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que les représentations graphiques de f et de $g + \lambda$ sont tangentes.
Remarque : $g + \lambda$ *est la fonction* $x \mapsto g(x) + \lambda$.

1. Soit h la fonction définie par $h(x) = f(x) - g(x)$. Montrer que $\exists c \in [0, 1]\ /\ h'(c) = 0$.
2. On prend $\lambda = h(c)$. Écrire l'équation de la tangente de f, puis de $g+\lambda$, au point d'abscisse c. Conclure.

Exercice 4.16
Tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'équation :

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

À tout point M de $\mathcal{C}$, de coordonnées $(m, f(m))$, on associe la droite $D = (OM)$, en convenant que c'est la tangente en M à $\mathcal{C}$ lorsque $m = O$. Montrer que D recoupe $\mathcal{C}$ en un point dont on précisera les coordonnées.

5 Fonctions réciproques

5.1 Un bref aperçu historique

Les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques ont été étudiées très tôt. Ainsi, la série pour $\arctan x$ a été donnée par Gregory en 1671 et redécouverte par Leibniz en 1674. La série pour $\arcsin x$ (voir chapitre suivant) est attribuée à Newton (1669). Ces séries ont permis de calculer des valeurs approchées de π. Par exemple, John Machin (publié en 1706) utilisait la formule

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

pour déterminer les 100 premières décimales de π (et sans calculatrice !).

5.2 Questions de cours

Vrai ou faux ?

(1) La fonction $f : x \to x^2$ n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

(2) La fonction $f(x) = 3x + 1$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la bijection réciproque est $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$.

(3) La fonction $x \to \arcsin x$ est définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(4) La fonction $f(x) = \arccos x$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arcsin(\sin x) = x$.

Retour sur les théorèmes du cours

Les énoncés suivants sont-ils corrects ? Si la réponse est non, les corrriger.

(1) Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f est une bijection de I sur $f(I)$.

(2) On suppose que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et est une bijection de I sur $f(I)$. Alors, f^{-1} est dérivable en tout y de $f(I)$ et $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ pour $y \in f(I)$.

Interprétation graphique

Les graphes suivants peuvent-ils être les graphes de deux fonctions f et f^{-1} ?

5.3 Quelques exercices

Exercice 5.1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x+2} & si \quad x < -1 \\ 2x+3 & si \quad -1 \leq x \leq 0 \\ x^2+2x+3 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

1. Tracer son graphe.
2. Montrer que f est continue et strictement croissante.
3. Donner les formules définissant sa fonction réciproque g et tracer le graphe de f et de g.
4. Étudier la dérivabilité de f et de g.

Exercice 5.2
1. Démontrer que la fonction réciproque d'une fonction impaire est impaire.
2. Pourquoi ne peut-on pas parler de la fonction réciproque d'une fonction paire ?

Exercice 5.3
Soit f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$. Montrer que f est continue, bijective et déterminer sa réciproque f^{-1}.

Exercice 5.4
On appelle « logarithme décimal » une fonction, notée log, proportionnelle à la fonction « logarithme népérien » (notée ln) et telle que $\log 10 = 1$.
1. Montrer que
$$\forall x > 0,\ \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$
2. Soit $x > 1$ trouver une relation entre le nombre de chiffres de x et la partie entière de $\log x$.
3. Soit $x < 1$, trouver une relation entre le nombre des zéros initiaux de x et la partie entière de $\log x$.
4. Déterminer, si elle existe, la fonction réciproque de log.

Exercice 5.5
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

1. Déterminer son ensemble de définition, et étudier sa parité.
2. Calculer sa fonction dérivée. Que peut-on en conclure ?

Exercice 5.6
On pose $f(x) = \arctan x + \arctan 2x$ pour x réel.
1. Étudier la fonction f et en tracer la représentation graphique.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera. On notera g son application réciproque. Sans aucune étude de g, tracer sa représentation graphique dans le même repère que f.

Exercice 5.7
Faire l'étude complète et tracer le graphe de la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

Exercice 5.8
Montrer :

$$\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$$

Exercice 5.9
Montrer :

$$\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

Exercice 5.10
Démontrer que :

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Trouver de même une expression pour $\sin(\arctan x)$.

Exercice 5.11
Comparer les fonctions

$$f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2} \text{ et } g(x) = \arccos x$$

Exercice 5.12
Simplifier :

$$f(x) = \arccos\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$g(x) = \arctan(\text{cotan}2x)$$

Exercice 5.13
Résoudre l'équation :

$$\arccos x = \arcsin x$$

6 Formules de Taylor, développements limités

6.1 Un bref aperçu historique

Taylor (1715), en utilisant des polynômes d'interpolation et des "infiniment petits", avait établi la formule que l'on écrit sous une forme moderne

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots\dots\dots$$

Pendant plus d'un siècle, on a pensé que cette formule était toujours vraie, c'est-à-dire que toute fonction pouvait s'écrire sous la forme d'une "series universallissima". On a alors donné les développements en série des fonctions usuelles. Notons que la formule pour $\ln(1+x)$ apparaît dans le livre de Mercator en 1668 et que l'on a déja vu les cas des fonctions arcsin et arctan dans le chapitre précédent. Jean Bernouilli et Cauchy ont donné les premiers exemples de fonctions pour lesquelles la série de Taylor converge mais pas vers $f(x)$.

6.2 Questions de cours

Opérations sur les développements limités

Soient f et g deux fonctions dont le développement limité à l'ordre 1 en 0 est donné par

$$f(x) = 1 + 3x + x\varepsilon(x);$$

$$g(x) = 2 + x + x\varepsilon(x);$$

Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0 des fonctions suivantes :

$$f + 4g,\ fg,\ f^2,\ f \circ g,\ g \circ f,\ \frac{f}{g}.$$

Limites usuelles

Retrouver à l'aide des développements limités les limites usuelles, à savoir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Une erreur classique

Dans un examen récent, on demandait de donner le développement limité de la fonction $f(x) = e^{\cos x}$ à l'ordre 3 en 0. Un étudiant donnait comme réponse

$$f(x) = 3 + 4x - 5x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

Expliquer pourquoi le correcteur s'est immédiatement rendu compte que le résultat est faux.

6.3 Quelques exercices

Exercice 6.1

1. Ecrire un encadrement de $\sin(0,1)$ en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 4.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $\ln(\frac{3}{2})$ et de $\sqrt{e}$ à 10^{-3} près.

Exercice 6.2

Soit f une fonction de classe $\mathbf{C}^2$ sur un intervalle ouvert contenant a. Calculer :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2}$$

Exercice 6.3

En appliquant le théorème de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x$$

$$\forall x > 0, \quad \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$$

$$\forall x \in]0, 2\pi], \quad \sin x > x - \frac{x^3}{6}$$

Exercice 6.4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que f'' est continue sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe des nombres K et L positifs tels que $|f(x)| \leq K$ et $|f''(x)| \leq L$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit un nombre $a > 0$. En utilisant des formules de Taylor au point 0, montrer qu'il existe des nombres α et β tels que
$$f(a) - f(-a) = 2af'(0) + \frac{a^2}{2}(f''(\alpha) - f''(\beta)).$$
2. Montrer que l'on a $|f'(0)| \leq \dfrac{K}{a} + \dfrac{a}{2}L$ pour tout nombre $a > 0$.
3. Posons $u(t) = \dfrac{K}{t} + \dfrac{t}{2}L$ pout $t > 0$. Etudier les variations de u. En déduire l'inégalité $|f'(0)| \leq \sqrt{2KL}$.
4. Soit x_0 un nombre réel et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = f(x + x_0)$. Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$. Montrer que l'on a $|f'(x_0)| \leq \sqrt{2KL}$.

Exercice 6.5

1. Calculer un DL_4 de $x \mapsto e^{2x}$
   - en élevant au carré celui de $x \mapsto e^x$
   - directement.
2. Calculer de même un DL_6 de $x \mapsto \sin^2 x$ par deux méthodes (dont l'une utilise un peu de trigonométrie).

Exercice 6.6

On admet que la fonction tan admet un DL au voisinage de 0 à tout ordre.

1. Expliquer pourquoi ce DL est de la forme :
$$\tan x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots + a_{2n+1} x^{2n+1} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$
2. Calculer a_1, a_3 (a_5, facultatif) par les méthodes suivantes :
   - en utilisant : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
   - en utilisant : $\arctan(\tan x) = x$
   - en utilisant : $\tan' x = 1 + \tan^2 x$

   Quelle méthode semble préférable ?

Exercice 6.7

Donner les DL suivants :

$$\begin{array}{rl}
f(x) = \arctan(x^2) & \text{à l'ordre 6 au voisinage de 0} \\
g(x) = \sin 2x - 2(e^x - 1) & \text{à l'ordre 7 au voisinage de 0} \\
h(x) = \dfrac{x^2}{\sin^2 x} & \text{à l'ordre 5 au voisinage de 0} \\
k(x) = \sin x (\sinh x)^2 & \text{à l'ordre 5 au voisinage de 0} \\
l(x) = \ln(1 + x\cos x) & \text{à l'ordre 4 au voisinage de 0} \\
m(x) = \dfrac{x \sin^2 x}{1 + x + x^2} & \text{à l'ordre 6 au voisinage de 0} \\
n(x) = \ln(e^x + e^{-x}) & \text{à l'ordre 6 au voisinage de 0}
\end{array}$$

Exercice 6.8
Calculer les limites suivantes à l'aide de développements limités :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{1-\sqrt{1-x^2}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x - \ln(1+x)}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\tan x - \tan 2x}{x(1-\cos 3x)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{(1+x^3)^2 - 1}$$
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x - \ln(1+x)}$$

Exercice 6.9
Calculer

1. Le développement limité en 1 de $\dfrac{\ln x}{x^2}$
2. Le développement limité en $+\infty$ de $\ln(x \tan \frac{1}{x})$

Exercice 6.10
Calculer $f^{(n)}(0)$ pour $1 \le n \le 27$ pour $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^6}$.

Quelques applications des DLs à l'étude de fonctions :

Exercice 6.11
Soit $f(x) = (x^6 + x^5 + x^4)^{1/6}$. Trouver l'asymptote en $+\infty$ à la courbe de f et déterminer leur position relative.

Exercice 6.12
Faire l'étude complète des fonctions suivantes : domaine de définition, continuité, dérivabilité, sens de variation, limites, position de la courbe par rapport aux tangentes, aux asymptotes, branches infinies.

1. $f(x) = x^2 e^{-2x}$
2. $f(x) = (x^3 - 1)^2$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$
4. $f(x) = x^2 \ln \mid \frac{x+1}{x} \mid$
5. $f(x) = \dfrac{x^3}{1-2x^2}$

Exercice 6.13
Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = (x^2 + x + 1)\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Etudier les variations de f.
2. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer un développement limité de f au voisinage de l'infini, permettant de trouver une asymptote Δ à $\mathcal{C}$ et la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ.
3. Déterminer les développements limités de f à l'ordre 2 au voisinage de 0 à droite et à gauche.

Exercice 6.14
Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1. Montrer que f est continue en 0.
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. Etudier le sens de variation de f.

4. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}$.
5. Déterminer le développement limité en 1 de f à l'ordre 3.
6. Préciser l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 ainsi que la position relative de T et $\mathcal{C}$ au voisinage de ce point.

Exercice 6.15
Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{2x}+3}{e^x+1}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, son sens de variation et ses limites en l'infini.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \ln\left(\dfrac{1+3e^{-2x}}{1+e^{-x}}\right)$.
3. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f admet deux asymptotes D_1 et D_2 qui se coupent en un point A de la courbe.
4. Donner l'équation de la tangente T en A.
5. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à D_1 et D_2.
6. Représenter sur un même dessin $\mathcal{C}$, D_1 et D_2. (On donne $\ln 2 \simeq 0,69$ et $\ln 3 \simeq 1,1$.)

7 Partiels

Université de Cergy-Pontoise — Novembre 99

Mathématiques SV S1

Durée 2 heures, documents et calculatrice interdits

Premier Exercice - 3 points

Soit E un ensemble non vide. On considère la proposition :

$$\forall a \in E, \forall b \in E, \ a \neq b$$

Cette proposition est-elle vraie lorsque $E = \{0\}$? Lorsque $E = \{1, 2\}$? Lorsque $E = \mathbb{N}$? En général, expliquer simplement ce que signifie cette proposition pour l'ensemble E.

Premier Exercice - 4 points

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Démontrer par récurrence que

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

Second Exercice - 4 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

(a) Calculer $f \circ f(x)$, $f \circ f \circ f(x)$.

(b) Pour n entier supérieur à 1, on appelle f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n = f \circ f \circ \ldots f \circ$$

On remarquera que $f_{n+1} = f \circ f_{n+1}$. Prouver, par récurrence, que

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + n}$$

Troisième Exercice - 4 points

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \mapsto 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+7} - 3}$$

$$\lim_{x \mapsto 1} \frac{x(\ln x)}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\cos x}{e^x + 1}$$

Quatrième Exercice - 5 points

On se donne un réel a et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{array}{llll} f & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\sin(ax)}{\ln(1+x)} \quad \text{si} x > 0 \\ & x & \mapsto & \frac{1-\cos(2x)}{x^2} \quad \text{si} x < 0 \end{array}$$

(a) Démontrer que f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

(b) Calculer

$$\lim_{x \mapsto 0, x>0} f(x) \qquad \lim_{x \mapsto 0, x<0} f(x)$$

(c) Montrer que l'on peut choisir a de sorte que f soit prolongeable par continuité en 0.

(d) Ayant choisi a ainsi, montrer qu'il existe un réel c de $[-\pi, 0]$ tel que $f(c) = 1$.

Université de Cergy-Pontoise Septembre 2000

Mathématiques

S1-SV

Durée 1h30, documents et calculatrices interdits

Premier Exercice - 4 points

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4} \qquad \lim_{x\mapsto +\infty} \frac{7e^x - x^3}{(\ln x)^2 - e^{2x}}$$

Second Exercice - 5 points

(a) Calculer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de :

$$f(x) = \sin(x - \sin x)$$

(b) En déduire

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1}$$

Troisième exercice - 7 points

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arcsin(4x^3 - 3x)$$

(a) Vérifier que

$$4x^3 - 3x - 1 = (x-1)(2x+1)^2 \quad \text{et} \quad 4x^3 - 3x + 1 = (x+1)(2x-1)^2$$

(b) En déduire l'ensemble de définition de f.

(c) Trouver les points de cet ensemble où f est dérivable et calculer $f'(x)$.

(d) Dresser le tableau des variations de f.

Quatrième exercice - 4 points

On suppose que f est une fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(0) = 1, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

(a) Montrer qu'il existe deux réels distincts a et b tels que :

$$f(a) = f(b) = \frac{1}{2}$$

On pourra s'aider d'un dessin.

(b) En déduire qu'il existe un réel c tel que :

$$f'(c) = 0$$

S1 SV
Université de Cergy-Pontoise
2000-2001

Examen de Mathématiques (Janvier 2000)
Durée : 2 heures
Calculatrices et documents interdits

Exercice 1 (5 points)

Calculer les limites suivantes.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1+x}{x^2}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2\ln(1+x)}{x^2}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right)$ (on pourra faire le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$).

Exercice 2 (3 points)

Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{1+x}$, puis de $e^{\sqrt{1+x}}$.

Exercice 3 (4 points)

Soit $f(x) = \text{Arcsin } (2x^2-1)$.
a) Déterminer l'ensemble de définition I de f.
b) f est-elle dérivable sur I ? Calculer $f'(x)$ en un point x où f est dérivable.

Exercice 4 (3 points)

Soient f et g deux fonctions définies, continues et dérivables sur $[a,b]$ telles que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$.
a) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.
b) Dans le cas particulier où $[a,b] = [0,1]$, $f(x) = x^2-1$ et $g(x) = -(x-1)^2$, montrer l'unicité d'un tel c.

Exercice 5 (5 points)

Soit $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.
a) Montrer que f est strictement décroissante et continue sur $I = [1,+\infty[$.
b) Déterminer $f(I) = J$.
c) En déduire l'existence d'une fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$. Déterminer $f^{-1}(y)$ pour $y \in J$.

S1 SV
Mathématiques
Université de Cergy-Pontoise
2000-2001

Partiel (novembre 2000)
(Durée : 2 heures. Calculatrices et documents interdits)

Exercice 1 (3 points)

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1.$$

Rappel : $n! = n.(n-1)...........2.1.$

Exercice 2 (4 points)

Calculer les limites suivantes.

1) $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-9}$.

2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{(\sin 3x)^3}{4x(1-\cos x)}$.

Exercice 3 (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|2x-1| - 3|x+1| = x$.

Exercice 4 (6 points)

Soient les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies par

$$f_1(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$f_2(x) = xe^x + 1$$

$$f_3(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Pour chacune des fonctions f_1, f_2 et f_3,
   1a) Donner le domaine de définition ;
   1b) Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$;
   1c) Etudier la continuité en 0.

2) En n'utilisant que les résultat démontrés en 1), attribuer à chacune des fonctions son graphe parmi ceux proposés ci-dessous. On justifiera son choix avec beaucoup de soin.

Exercice 5 (4 points)

Soit $f(x) = e^{x^2+1}(3x^2 + x + 1)$.

1) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2) Déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$. En déduire qu'il existe $c \in]-1,1[$ tel que la tangente au graphe de f en $(c, f(c))$ soit horizontale.

S1 SV
Université de Cergy-Pontoise
2000-2001

Examen de Mathématiques (Janvier 2001)
Durée : 2 heures
Calculatrices et documents interdits

Exercice 1 Calculer les limites suivantes.

1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1-2x}{3x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}$;

3) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\mathrm{Ln}x - x - 1}{(x-1)^2}$.

Exercice 2 Soit la fonction f donnée par $f(x) = \arcsin(2x-1)$.

1) Donner le domaine de définition de f.
2) Pour quelles valeurs de x peut-on calculer $f'(x)$? Pour ces valeurs de x, calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de f.
3) Calculer $f(0)$, $f(1)$.
4) En utilisant les questions précédentes, donner l'allure du graphe de f.

Exercice 3 Soit la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{1+2x}{1-x}$.

1) Déterminer le domaine de définition D de f. Calculer $f'(x)$ pour $x \in D$. Donner le tableau de variations de f.
2) Déterminer les asymptotes (verticales et horizontales) au graphe de f (on n'utilisera pas de développements limités).
3) Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 2. En déduire l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0, puis la position relative de cette tangente avec le graphe de f.
4) En utilisant les questions précédentes, donner l'allure du graphe de f.

Exercice 4

1) Soit $x > 0$.
1a) Montrer que si $c \in]x, x+1[$, $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{c} \leq \dfrac{1}{x}$.

1b) Rappeler l'énoncé du théorème des accroissemnts finis. En donner une interprétation graphique (on pourra illustrer par un dessin).
1c) Déduire de 1a) et 1b) que

$$\frac{1}{x+1} \leq \mathrm{Ln}(x+1) - \mathrm{Ln}x \leq \frac{1}{x}.$$

2) Déduire de ce qui précède $\lim_{x\to+\infty} x(\mathrm{Ln}(x+1) - \mathrm{Ln}x)$.