MATHS 110C
CHAPITRE V : DÉRIVABILITÉ

Après avoir rappelé les principales règles de dérivation, nous énoncerons et démontrerons le théorème des accroissements finis. Nous en donnerons ensuite des applications, en particulier à l'étude de suites. Nous expliquerons aussi comment dériver des fonctions de plusieurs variables.

1. Définition et propriétés élémentaires

Soient I un intervalle (ouvert) de $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable sur I si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est fini. On note alors $f'(x_0)$ cette limite que l'on appelle nombre dérivé de f en x_0.

Remarque. Nous utiliserons par la suite le fait que si $f'(x_0)$ existe, alors

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

et que, réciproquement, s i $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe, alors f est dérivable en x_0 et le nombre dérivée de f en x_0 est égal à cette limite. Pour voir cela, faire le changement de variable $x = x_0 + h$ dans la définition du nombre dérivé.

On dit que f est dérivable sur I si pour tout $x \in I$, f est dérivable en x. Dans ce cas, nous pouvons définir une nouvelle fonction, que l'on appelle fonction dérivée ou tout simplement dérivée de f et que l'on note f', par

$$\begin{array}{rcl} f' : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f'(x) \end{array}$$

où $f'(x)$ est le nombre dérivée de f en x.

Exemple. Soit $f(x) = \sqrt{x}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$. Alors, le taux de variation de f en x_0 s'écrit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}.$$

La dernière égalité a été obtenue en multipliant "le haut et le bas" par la quantité conjuguée du numérateur, à savoir $\sqrt{x} + \sqrt{x_0}$. Nous en déduisons aisément, en passant à la limite, que si $x_0 \neq 0$, $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Nous allons maintenant voir comment la dérivabilité et la continuité sont reliées. Pour cela, considérons une fonction f dérivable en x_0. Posons

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Alors, $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et donc ε est continue en x_0. De plus, par un calcul élémentaire, nous avons, pour tout $x \neq x_0$,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \tag{1}$$

En fait, cette égalité reste vraie en x_0 (pour voir cela, remplacer x par x_0 dans (1)). En passant à la limite dans (1), nous en déduisons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est à dire que f est continue en x_0. Nous avons donc démontré que

$$f \text{ dérivable en } x_0 \Longrightarrow f \text{ continue en } x_0.$$

Attention, la réciproque est fausse!!!!!!!!!! Considérons par exemple la fonction $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que f est continue en 0. Cependant,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0, x<0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0, x<0} \frac{-x}{x} &= -1, \\ \lim_{x \to 0, x>0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0, x<0} \frac{x}{x} &= 1. \end{aligned}$$

Donc, la limite du taux de variation de f en 0 n'existe pas et f n'est pas dérivable en 0.

Remarque. Nous avons vu que si f est dérivable en x_0, alors il existe une fonction ε continue en x_0 telle que $\varepsilon(x_0) = 0$ et pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

Dans la suite, nous utiliserons aussi la version avec des "h", c'est à dire

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h),$$

avec ε continue en 0 et $\varepsilon(0) = 0$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et une fonction ε continue en x_0 telle que $\varepsilon(x_0) = 0$ et pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0. Alors,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (a + \varepsilon(x)) = a.$$

Nous en déduisons que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = a$.

Donnons maintenant une interprétation graphique de la dérivabilité. Supposons que f soit dérivable en x_0. Soit $\mathcal{C}$ le graphe de f (dans un repère orthonormé du plan). Notons M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et pour $x \in I$, $x \neq x_0$, M le point de coordonnées $(x, f(x))$. Notons que M et M_0 sont des points de $\mathcal{C}$. Le taux de variation $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ représente le coefficient directeur de la droite MM_0 (c'est à dire la droite passant par M et M_0). Puisque f est dérivable en x_0, ce coefficient directeur tend, quand x tend vers x_0, vers $f'(x_0)$. Ainsi, de façon intuitive, quand x tend vers x_0, la droite MM_0 a pour position limite la droite passant par M_0 (qui est le point commun à toutes les droites MM_0) et de coefficient directeur $f'(x_0)$. Cette droite limite s'appelle la tangente à $\mathcal{C}$ au point M_0. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que son équation est

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$

Regardons maintenant ce qui se passe si le taux de variation n'a pas de limite ou une limite infinie. Supposons d'abord que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ n'existe pas mais que $\displaystyle\lim_{x\to x_0, x>x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est fini (respectivement $\displaystyle\lim_{x\to x_0, x><x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est fini). On dit alors que f est dérivable à droite en x_0 (respectivement à gauche en x_0) et on note $f'_d(x_0)$ (respectivement $f'_g(x_0)$) cette limite finie. Dans ce cas, le graphe $\mathcal{C}$ de f admet une demi-tangente à droite (respectivement à gauche) au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ d'équation $y = f'_d(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ (respectivement $y = f'_g(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$). Reprenons l'exemple de la fonction $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$. Alors, nous avons vu que $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$. Le graphe de f admet au point 0 deux demi-tangentes d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$. Il est clair que f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ (et dans ce cas, $f'(x_0)$ est égale à la valeur commune).

Supposons maintenant que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ ou $-\infty$. Alors, le graphe de f admet au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0)$ une tangente verticale. Par exemple, considérer le cas de la fonction $f(x) = \sqrt{|x|}$ en $x_0 = 0$. Notons que nous reviendrons plus tard sur le cas des tangentes horizontales (qui correspondent à $f'(x_0) = 0$).

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Supposons que la fonction dérivée soit elle-même dérivable sur I. Nous pouvons alors définir $f'' = (f')' : I \to \mathbb{R}$. Cette fonction s'appelle dérivée seconde de f. On la note aussi $f^{(2)}$. De manière plus générale, si f est dérivable n fois sur I, la dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$, est donnée par récurrence par $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Remarques. N'oubliez pas les parenthèses dans $f^{(n)}$. En effet, f^n désigne usuellement la puissance n-ième de f. Par convention, $f^{(0)} = f$.

Exemple 1. Soit $f(x) = e^x$. Alors, f est dérivable autant de fois que l'on veut sur $\mathbb{R}$ (une telle fonction est dite de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$) et nous pouvons montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = e^x$.

Exemple 2. Soit $g(x) = x^3$. Alors, g est dérivable à tout ordre sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 3x^2,\ g^{(2)}(x) = 6x,\ g^{(3)}(x) = 6,\ \text{et pour tout } n \geq 4,\ g^{(n)}(x) = 0.$$

Notons que si f et g sont n fois dérivables sur I, alors $f + g$ est n fois dérivable et $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$. Nous laissons la démonstration de ce résultat (par récurrence) au lecteur. Des compléments sur les dérivées successives sont donnés à la fin du chapitre.

Remarques (Liens avec la physique) : L'interprétation physique de la dérivée est la vitesse et de la dérivée seconde est l'accélération. Notons aussi qu'en physique la dérivée $f'(x)$ se note parfois $\dfrac{df}{dx}$.

2. Calculs et règles de dérivation

2.1. **Dérivées des fonctions usuelles.**

Nous rappelons les formules vues en Terminale.

$f(x)$	$f'(x)$	D_f	$D_{f'}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{+*}$

Rappelons que $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, ainsi $f(x) = x^\alpha$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Dans le cas particulier où $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ et sur $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$. Elle est dérivable sur son ensemble de définition et $f'(x) = nx^{n-1}$.

2.2. **Dérivation et opérations.**

Nous rappelons sans preuve (voir le commentaire plus bas) les régles usuelles de dérivation.

Fonction	Dérivée
$f+g$	$f'+g'$
fg	$f'g+g'f$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'g-g'f}{g^2}$
$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$

Nous allons maintenant démontrer la règle sur la composition. Une preuve identique peut être utilisée pour démontrer les résultats donnés dans le tableau précédent.

Proposition 1. *Si la fonction f est dérivable en x_0 et si la fonction g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0))$.*

Démonstration. Rappelons que le fait que f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ est équivalent à l'existence de deux fonctions ε et η telles que

$$(*)\ f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0 \text{ et } \varepsilon \text{ continue en } 0,$$

$$(**)\ g(f(x_0)+k) = g(f(x_0)) + kg'(f(x_0)) + k\eta(k) \text{ avec } \lim_{k\to 0} \eta(k) = 0 \text{ et } \eta \text{ continue en } 0.$$

De (*), nous déduisons

$$g(f(x_0+h)) = g\left(f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)\right).$$

Posons $k(h) = hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$. En appliquant (**) avec $k = k(h)$, nous obtenons

$$g(f(x_0+h)) = g(f(x_0) + k(h)) = g(f(x_0)) + k(h)g'(f(x_0)) + k(h)\eta(k(h)).$$

En d'autres termes,

$$g(f(x_0+h)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(hf'(x_0)+h\varepsilon(h)) + (hf'(x_0)+h\varepsilon(h))\eta(hf'(x_0)+h\varepsilon(h)).$$

Ce que nous pouvons encore écrire

$$g(f(x_0+h)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0) + h\alpha(h),$$

où $\alpha(h) = g'(f(x_0))\varepsilon(h) + (hf'(x_0) + h\varepsilon(h))\eta(hf'(x_0) + h\varepsilon(h))$. Comme ε et η sont nulles en 0 et continues, il vient que α est nulle en 0 et continue. D'où,

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = f'(x_0)g'(f(x_0)).$$

Ce qui est la formule cherchée. □

Nous déduisons de la proposition 1 que si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, alors

Fonction	Dérivée
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln \lvert u(x) \rvert$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$\sin u(x)$	$u'(x) \cos u(x)$
$\cos u(x)$	$-u'(x) \sin u(x)$
$u^\alpha(x) (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha u'(x) u^{\alpha-1}(x)$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Attention, ici, nous ne précisons pas le domaine de dérivabilité de la fonction.

Remarque. Si $f(x) = \ln(1+x)$, alors la tableau précédent donne $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$. En particulier, $f'(0) = 1$. Donc,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1.$$

Nous retrouvons ainsi une limite donnée dans le chapitre 3. Par le même procédé, nous pouvons retrouver $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

2.3. **Dérivée d'une fonction réciproque.** Commençons par un calcul formel (mais instructif). Considérons une fonction f qui est une bijection sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Supposons en outre que f est dérivable sur I et que sa fonction réciproque f^{-1} soit dérivable qur $f(I)$. Pour tout $y \in f(I)$,

$$f(f^{-1}(y)) = y.$$

Dérivons cette relation en utilisant la règle sur la composition :

$$(f^{-1})'(y) f'(f^{-1}(y)) = 1.$$

Donc, si $(*)$ $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Nous allons maintenant voir de façon rigoureuse que cette formule est vraie dans les cas qui nous intéressent.

Théorème 2. *Soit f une fonction continue strictement monotone sur I. Si f admet une dérivée non nulle en $x_0 \in I$, alors f^{-1} admet une dérivée en $y_0 = f(x_0) \in f(I)$ et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Ainsi, si f est dérivable sur I, alors f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$ privé des points $f(x)$ où $x \in I$ et $f'(x) = 0$. En particulier si une fonction f est dérivable sur un intervalle I avec $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (ou $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$) alors f admet une fonction réciproque qui est dérivable sur $f(I)$ (et donc la dérivée est donnée par la formule du théorème 2).

Démonstration. Notons que

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

où $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$. Or, si $y \to y_0$, comme f^{-1} est continue, $f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0)$, c'est à dire $x \to x_0$. On peut alors conclure puisque

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

ce qui a un sens puisque $f'(x_0) \neq 0$. $\square$

Il est important que le lecteur comprenne que les variables x et y sont muettes (c'est à dire sans signification précise). Ainsi, la formule donnée dans le théorème 2 peut aussi s'écrire

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

sous la condition $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$. Nous allons traiter deux exemples dans lesquels nous utiliserons la variable x ou la variable y.

Exemple 1 : Fonctions "racine" et "puissance" Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé et soit la fonction $f(x) = x^m$. Nous avons vu que cette fonction admet une fonction réciproque définie, continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On note cette fonction réciproque $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{m}}$. Cette fonction est dérivable en tout $y = f(x)$ tel que $f'(x) \neq 0$. Or, $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, et $f'(0) = 0$. Donc, d'après le théorème 2, f^{-1} est dérivable en tout $y \in]0, +\infty[$ et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{m(f^{-1}(y))^{m-1}} = \frac{1}{m} y^{\frac{1}{m}-1}.$$

En particulier, si $m = 2$, la fonction réciproque est la fonction "racine carrée" et nous retrouvons que sa dérivée en y est $\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$.

Exemple 2 : Fonctions "logarithme" et "exponentielle"

Considérons la fonction "logarithme népérien" $f(x) = \ln x$. Nous avons vu qu'elle admet une bijection réciproque f^{-1} qui est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (et à valeurs dans $]0, +\infty[$). Cette fonction est la fonction exponentielle et se note e^x. Comme $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$, d'aprés le théorème 2, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{f^{-1}(x)}} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

Donc, la dérivée de la fonction exponentielle est elle-même.

2.4. **Comment dériver une fonction de plusieurs variables ?** Les fonctions que nous allons considérer sont définies sur

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, \text{ ou } \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}.$$

Une application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (respectivement de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$) est la donnée pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ d'un réel noté $f(x, y)$ (respectivement noté $f(x, y, z)$). Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (respectivement $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (respectivement de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$) à condition de se restreindre à son ensemble de définition.

Exemple 1. Soit $f(x, y) = \dfrac{3}{1 - xy}$. Alors, $f(x, y)$ est définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $1 - xy \neq 0$. Notons que l'ensemble des points du plan d'équation $xy = 1$ (c'est à dire $y = 1/x$) est une hyperbole.

Exemple 2. Soit $f(x, y, z) = \dfrac{4}{x + 4y + z + 1}$. Alors, $f(x, y, z)$ est définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec $x + 4y + z + 1 \neq 0$. Notons que l'ensemble des points de l'espace d'équation $x + 4y + z + 1 = 0$ est un plan.

Nous pouvons voir les fonctions sur $\mathbb{R}^2$ ou sur $\mathbb{R}^3$ comme des fonctions sur l'ensemble des points du plan ou de l'espace respectivement, c'est à dire, quand c'est possible, elles associent à un point une valeur (réelle). Donnons un exemple qui est important historiquement pour nous. Le lecteur pourrait se demander pourquoi l'Université de Grenoble I s'appelle Université Joseph Fourier, alors que celui-ci n'est pas né dans le Dauphiné (il est né à Auxerre en 1768 et mort à Paris en 1830). En fait, Fourier fut préfet de l'Isère. On lui doit (entre autres) la construction de la portion française de la route menant à Turin et le drainage des marais paludéens. Mais, Fourier était aussi un scientifique, il est souvent considéré comme le fondateur de la physique mathématique. Son grand traité est "Théorie analytique de la chaleur" (parution vers 1822), dans lequel il étudie la propagation de la chaleur. Pour cela, il introduit les bases de ce que l'on appelle maintenant l'analyse de Fourier. A quoi s'intéressait Fourier ? Prenez une plaque (trés mince) que l'on assimile à un plan. Chauffez cette plaque en un point. Comment se diffuse la chaleur ? C'est à dire quelles est la quantité de chaleur (notée $f(x, y, t)$) au point M de coordonnées (x, y) au temps t (le temps $t = 0$ correspondant à l'instant où nous chauffons la plaque). Le but de Fourier était de trouver expérimentalement l'équation satisfaite par la quantité de chaleur f, puis de la résoudre mathématiquement. Il a considéré le cas d'autres solides et a tenté d'en présenter une approche uniforme en développant des outils mathématiques adaptés (comme ce que nous appelons maintenant les séries de Fourier). Nous donnerons plus tard un autre exemple de situations considérées par Fourier.

Jean-Baptiste Fourier

Considérons une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pour dériver cette fonction par rapport à x, nous considérons que y est une constante et donc que la fonction ne dépend que de x. S'il est possible de dériver cette fonction qui ne dépend que de x, nous obetnons

ce que nous appelons la dérivée partielle de f par rapport à x, qui se note $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. La même méthode permet de calculer la dérivée de f par rapport à y, qui se note $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
Exemple 1 : Soit $f(x,y) = xy + 4x + 5y$. Cette fonction est définie pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$. Alors, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y+4$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x+5$. Ici, il est important de voir que la dérivée de xy par rapport à x est y.

Exemple 2 : Soit $f(x,y) = \cos(xy)$. Cette fonction est définie pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$. Alors, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy)$. La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est une fonction de deux variables que nous pouvons dériver suivant les mêmes règles :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2\sin(xy).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy).$$

De la même façon, nous pouvons calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.
Remarque : En faisant ces calculs, le lecteur se rend compte que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Ceci n'est pas toujours vrai, c'est à dire dériver par rapport à x puis par rapport à y (c'est à dire $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$) ne donne par forcément le même résultat que dériver par rapport à y puis par rapport à x (c'est à dire $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$).

S'il existe, le laplacien de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, noté Δf, est donné par

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

Les mêmes règles dérivation s'adapte pour les fonctions de 3 variables.

Exemple. Soit $f(x,y,z) = xyz$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^3$. De plus pour tout (x,y,z) dans $\mathbb{R}^3$, nous avons par exemple

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = z.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}(x,y,z) = 0.$$

S'il existe, le laplacien de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, noté Δf, est donné par

$$\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z).$$

Revenons sur l'oeuvre de Fourier. Il s'est par exemple intéréssé à la propagation de la chaleur dans les prismes. Prenons un prisme représenté par $0 \leq x < +\infty$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ et $-\infty < z < +\infty$. Le problème que considère Fourier est de déterminer la température $T = T(x,y,z)$ dans le prisme en supposant que la température T est maintenue à la valeur 0 sur les côtés du prisme et à la valeur 1 à sa base, c'est à dire

$$T(x,\pi/2,z) = T(x,-\pi/2,z) = 0, \forall x \geq 0, \forall z \in \mathbb{R},$$

$$T(0,y,z) = 1, \forall y \in]-\pi/2, \pi/2[, \forall z \in \mathbb{R}.$$

En fait, la température ne dépend pas de z et donc $T = T(x,y)$. De plus, Fourier démontre que T doit satisfaire à l'équation

$$\Delta T(x,y) = 0.$$

Le lecteur vérifiera que la solution est donnée par

$$T(x,y) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{2\cos y}{e^x - e^{-x}}\right).$$

Fourier n'a pas sorti cette formule "de son chapeau" ! Il l'obtient à la suite de calculs mettant en jeu ce que l'on appelle maintenant les séries de Fourier.

Exercice. Equation des ondes en sismologie.
L'équation des ondes est

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = C\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

où f est une fonction dépendant de la variable "espace" ($x \in \mathbb{R}$ pour nous) et du temps ($t > 0$), et C est une constante.
1) Considérons une onde se déplaçant à la vitesse V suivant la loi $f(x,t) = (x - Vt)^2$. A quelle condition, f est solution de l'équation des ondes ?
2) Donner une condition pour que l'onde $f(x,t) = g(x - Vt)$ soit solution de l'équation des ondes.
3) Existe-t-il des ondes sinusoidales, c'est à dire décrites par une fonction de la forme $f(x,t) = \sin(kx - \omega t)$?

3. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Nous allons dans cette section démontrer deux résultats importants. Le reste du chapitre sera consacré a des applications.

Théorème 3 (Théorème de Rolle)**.** *Soit f une fonction dérivable sur $]a,b[$, continue sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Remarque. Comment se souvenir que les hypothèse du théorème de Rolle sont “dérivable sur $]a, b[$, continue sur $[a, b]$”, et non pas “dérivable sur $[a, b]$, continue sur $]a, b[$” ? Dans les mauvaises hypothèses, la dérivabilité de f sur $[a, b]$ implique sa continuité sur $[a, b]$, donc sur $]a, b[$, c'est à dire l'hypothèse de continuité ne servirait à rien.
Il faut d'ailleurs vérifier avec soin que les hypothèses du théorème de Rolle sont satisfaites avant de l'appliquer. Considérons $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$. Cette fonction est continue sur $[-1, 1]$, $f(-1) = f(1)$. Pourtant, il n'existe pas de $c \in]-1, 1[$ tel que $f'(c) = 0$. Nous ne pouvons pas appliquer le théorème de Rolle à la fonction valeur absolue sur $[-1, 1]$, car elle n'est pas dérivable en 0, donc sur $]-1, 1[$.

L'interprétation graphique est la suivante. Sous les hypothèses du théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que le graphe de f admet au point de coordonnées $(c, f(c))$ une tangente horizontale.

La stratégie de preuve du théorème de Rolle est simple. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, f est bornée et atteint ses bornes, disons en $d_1 \in [a, b]$ et $d_2 \in [a, b]$. Si f n'est pas une fonction constante sur $[a, b]$, nous montrerons qu'au moins un des d_i est dans l'intervalle ouvert $]a, b[$, puis qu'en ce point (qui correspond à un extremum de f), la dérivée s'annule. Le cas où f est constante est évident.

Démonstration. Cas 1 : f est constante sur $[a, b]$. Alors, tous les taux d'accroissement de la forme $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$, où x, $y \in]a, b[$, sont nulles. Donc, en tout $x \in]a, b[$, f est dérivable en x et $f'(x) = 0$. En d'autres termes, tout point de $]a, b[$ satisfait $f'(c) = 0$. Nous voyons ici qu'il n'y a pas en général unicité du c cherché.

Cas 2 : f n'est pas constante sur $[a, b]$. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes (voir le théorème 5 du chapitre IV). Ainsi, il existe $d_1 \in [a, b]$ et $d_2 \in]a, b[$ tel que

$$(*) f(d_1) \leq f(x) \leq f(d_2), \forall x \in [a, b].$$

Comme f n'est pas constante sur $[a, b]$, $f(d_1) \neq f(d_2)$ (en effet, l'égalité $f(d_1) = f(d_2)$ implique, d'aprés (*), $f(x) = f(d_1)$ pour tout $x \in [a, b]$, c'est à dire f constante sur

$[a, b]$). On en déduit que $f(a)$ (et donc $f(b)$) est distinct de d_1 ou de d_2 (voir même des deux). En effet, supposons que $f(a) = f(d_1)$ et $f(a) = f(d_2)$. Alors, $f(d_1) = f(d_2)$, ce qui est absurde. Supposons que $f(a) \neq f(d_1)$ (l'autre cas se traite de façon identique) et donc $f(d_1) \neq f(b)$. Donc, $d_1 \neq a$, $d_1 \neq b$. Comme $d_1 \in [a, b]$, nous en déduisons que $d_1 \in]a, b[$. Montrons maintenant que $f'(d_1) = 0$. Or, pour tout $x \in [a, b]$, $f(d_1) \leq f(x)$. Donc, si $x \in]d_1, b[$, $\dfrac{f(x) - f(d_1)}{x - d_1} \geq 0$. Par passage à la limite, nous en déduisons que $f'_d(d_1) \geq 0$. Comme f est dérivable en d_1 (puisque $d_1 \in]a, b[$ et f est dérivable sur $]a, b[$), $f'(d_1) = f'_d(d_1)$. Donc, $f'(d_1) \geq 0$. Le même argument montre que $f'_g(d_1) \leq 0$, puis que $f'(d_1) \leq 0$. Donc, $f'(d_1) = 0$, et $c = d_1$ convient. $\square$

Cette démontration montre que si f a un maximum (respectivement un minimum) en x_0 sur l'intervalle I, c'est à dire $f(x) \leq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \geq f(x_0)$) pour tout $x \in I$, alors $f'(x_0) = 0$. Géométriquement,cela signifie que le graphe de f a une tangente horizontale au point $(x_0, f(x_0)$. Notons que la réciproque est en général fausse. Par exemple, considérons la fonction $f(x) = x^3$. Alors, $f'(0) = 0$. Cependant, $f(1) = 1 > f(0)$ et $f(-1) = -1 > f(0)$. Donc, f n'a pas d'extremum en 0.

Théorème 4 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$, continue sur $[a, b]$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Rappelons que le nombre $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le coefficient directeur de la droite passant par les points A de coordonnées $(a, f(a))$ et B de coordonnées $(b, f(b))$. Le théorème des accroissements finis s'interprète donc graphiquement de la façon suivante. Sous les hypothèses du théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que la tangente au graphe de f au point de coordonnées $(c, f(c))$ est paralèlle à la droite passant par A et B.

Si nous supposons de plus que $f(a) = f(b)$, le théorème des accroissements finis redonne le théorème de Rolle. Le lecteur peut donc se demander pourquoi ne pas avoir démontré d'abord le théorème des accroissements finis. Tout simplement, parce que nous allons démontrer ce théorème comme une conséquence du théorème de Rolle!

Démonstration. Nous allons utiliser une technique classique, qui consiste à sortir du chapeau une fonction auxilaire à laquelle nous appliquons le théorème de Rolle. Considérons ainsi la fonction

$$g(x) = f(x) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

La fonction g est la somme de f et d'un polynôme de degré 1 , c'est à dire $P(x) = -(x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Alors,
- g est dérivable sur $]a,b[$, comme somme de deux fonctions dérivables sur $]a,b[$.
- g est continue sur $[a,b]$, comme somme de deux fonctions continues sur $[a,b]$.
- $g(a) = f(a) = g(b)$.

Donc, d'après le théorème de Rolle appliqué à la fonction g sur $[a,b]$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or, un calcul élémentaire montre que $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, puisque $P'(c) = -\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. D'où, $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ □

Nous allons dans les sections suivantes donner des applications du théorème des accroissements finis. Nous insistons sur le fait que, dans ce qui suit, I est un intervalle quelconque, qui peut être $\mathbb{R}$ tout entier comme dans l'exemple ci-dessous.

4. Inégalités des accroissements finis

Cette inégalité a été vue en terminale.

Théorème 5 (Inégalités des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Supposons que f' est borné sur I, c'est à dire qu'il existe $k \geq 0$ tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$. Alors, pour tout $x \in I$, tout $y \in I$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

Exemple. Soit $f(x) = \sin x$. Alors, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| = |\cos x| \leq 1$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y \in \mathbb{R}$,

$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y|.$$

Démonstration. Soient $x \in I$ et $y \in I$. Si $x = y$, alors on a $|f(x)-f(y)| = 0 = k|x-y|$. Supposons maintenant que $x < y$ (le raisonnement dans le cas $y < x$ est identique, il suffit d'échanger les rôles de x et y). Alors, la fonction f est dérivable (et donc continue) sur l'intervalle $[x,y]$. Donc, d'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction f sur $[x,y]$, il existe $c \in]x,y[$ tel que $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$. Nous en déduisons

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)|.|x-y| \leq k|x-y|.$$

□

Nous allons voir comment appliquer le théorème des accroissements finis (ou plutôt l'inégalité des accroissements finis) à l'étude de suites données par une relation de récrurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour cela, nous allons considérer un exemple. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3/2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{u_n}$. Donc, cette relation est de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \dfrac{2+x}{x}$. Nos pouvons voir facilement (par récurrence) que la suite (u_n) est bien définie, car strictement positive. Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, si la suite (u_n) converge, sa limite est solution de $f(x) = x$. Un rapide calcul montrer que les solutions de cette équation sont $x = -1$ et $x = 2$. La représentation graphique de la suite donne

Nous pouvons donc conjecturer que la suite (u_n) tend vers $l = 2$. Pour démontrer cela, nous allons utiliser le théorème des accroissements finis.

Exercice. Soit la suite $u_n)$ définie par $u_0 = 3/2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{u_n}$.
Posons $I = [3/2; 2]$.
1a) Démontrer que pour tout $x \in I$, $f(x)$ reste dans I.
1b) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
1c) Démontrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \dfrac{8}{9}$.
2) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(u_n) - 2| \leq \dfrac{8}{9}|u_n - 2|$.
3) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| \leq \left(\dfrac{8}{9}\right)^n$.
4) En déduire que (u_n) converge vers 2.
5) A partir de quel rang a-t-on $|u_n - 2| \leq 10^{-4}$.

L'exercice est laissé au lecteur. Notons seulement que le théorème des accroissements finis est utilisé dans la question 3. En effet, d'après la question 1c) et l'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur I,

$$|f(x) - f(2)| \leq \frac{8}{9}|x - 2|$$

pour tout $x \in I$. Comme $f(2) = 2$ (2 est un point fixe de f), ceci s'écrit

$$|f(x) - 2| \leq \frac{8}{9}|x - 2|, \forall x \in I.$$

Or, d'après la question 1b), u_n est dans I. Donc, l'inégalité précédente donne pour $x = u_n$,

$$|f(u_n) - 2| \leq \frac{8}{9}|u_n - 2|.$$

Ce que nous pouvons aussi écrire

$$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{8}{9}|u_n - 2|.$$

5. Sens de variation et bijection

Nous avons déja signalé au chapitre IV qu'une fonction à derivée positive (respectivement négative) sur un intervalle est croissante (respectivement décroissante) sur cet intervalle. Nous allons maintenant le démontrer grâce au théorème des accroissements finis.

Théorème 6. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors,*
(i) f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
(ii) f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.
(iii) f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Démonstration. Démontrons tout d'abord (i). Pour cela, supposons que f est croissante sur I et montrons que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Fixons $x \in I$. Si $y \in I$ est tel que $y < x$, alors, puisque f est croissante, $f(y) \leq f(x)$. Donc, puisque f est dérivable en x, $f'_d(x) = \lim_{y \to x, y < x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ existe et est positive ou nulle. D'où, $f'(x) = f'_d(x) \geq 0$. Réciproquement, supposons que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Considérons x et y dans I tel que $x < y$. Alors, la fonction f est dérivable (et donc continue) sur l'intervalle $[x, y]$. Donc, d'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction f sur $[x, y]$, il existe $c \in]x, y[$ tel que $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$. Comme par hypothèse $f'(c) \geq 0$, il s'en suit que $f(x) \leq f(y)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in I$ et $y \in I$ tels que $x < y$, nous en déduisons que f est croissante sur I.
Nous laissons le soin au lecteur de modifier l'argument précédent pour démontrer (ii). Le dernier point découle des deux précédents en remarquant qu'une fonction qui est à la fois croissante et décroissante sur I est constante sur I. Notons que nous avons déja vu que la dérivée d'une fonction constante sur I est nulle en tout point de I (voir le cas 1 de la démonstration du théorème de Rolle). $\square$

Il est important de noter que dans la théorème 6, nous nous sommes placés sur un intervalle. Le même résultat est faux en général si I n'est pas un intervalle. Nous verrons à la fin de ce paragraphe un exemple de fonction dont la dérivée est nulle sur $\mathbb{R}^*$, mais qui n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$.

Attention ! Dans le résultat précédent, nous parlons de "fonctions croissantes" et non de "fonctions STRICTEMENT croissantes". En particulier, il est FAUX qu'une fonction est strictement croissante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si et seulement si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Pour voir cela, prenons la fonction $f(x) = x^3$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En effet, si $x < y$, alors $f(x) = x^3 < y^3 = f(y)$. Pourtant, $f'(0) = 0$.

Nous admettrons que le résultat suivant (que nous utiliserons par la suite) est vraie.

Théorème 7. *Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ telle que $f'(x) > 0$ (réciproquement $f'(x) < 0$) pour tout $x \in]a, b[$. Alors, f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur $[a, b]$.*

En particulier, la dérivée peut être nulle en a et b.

Nous allons appliquer ceci aux fonctions réciproques. Soit $f(x) = \tan x$. Souvenons nous que cette fonction est définie partout sauf pour les x de la forme $(2k+1)\pi/2$. Plaçons nous sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. Sur cet intervalle, f est dérivable et, pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$. Donc, f est strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et $f(]-\pi/2, \pi/2[) =]\lim_{x \to -\pi/2} f(x), \lim_{x \to \pi/2} f(x)[= \mathbb{R}$. Donc, d'après le théorème 8 du chapitre IV, la fonction tan est une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc une bijection réciproque, notée arctan, qui est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. En fait, $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2]$ est telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y = \arctan x \text{ si et seulement si } (x = \tan y \text{ ET } -\pi/2 < y < \pi/2).$$

Nous en déduisons que $\arctan 0 = 0$ et $\arctan 1 = \pi/4$. Notons aussi que $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\pi/2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \pi/2$. Ainsi, le graphe de arctan admet aux infinis des asymptotes d'équation $y = -\pi/2$ et $y = \pi/2$.

D'après les propriétés générales sur les fonctions réciproques vues dans la section 4.3 du chapitre IV, nous avons

$$\arctan(\tan x) = x, \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[\text{ et } \tan(\arctan x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Comme la dérivée de la fonction tan ne s'annule jamais sur $]-\pi/2, \pi/2[$, nous en déduisons, d'après le théorème 2, que la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

La fonction arctan est impaire. En effet, puisque la fonction tan est impaire, nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y = \arctan(-x) &\iff (x = \tan(-y) \text{ ET } -(\pi/2) < y < \pi/2) \\ &\iff (x = -\tan y \text{ ET } -(\pi/2) < y < \pi/2) \\ &\iff (-x = \tan y \text{ ET } -(\pi/2) < y < \pi/2) \\ &\iff y = -\arctan(x). \end{aligned}$$

Donc, $\arctan(-x) = -\arctan(x)$.

<u>Graphes de tan et de arctan</u>

Considérons maintenant la fonction

$$\phi(x) = \arctan x + \arctan(1/x).$$

Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\phi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}1 + \frac{1}{x^2}}{=} \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Nous en déduisons que ϕ est constante sur chaque intervalle $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ (et non sur $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas un intervalle !). Or, $\phi(1) = 2\arctan 1 = \pi/2$ et, puisque la fonction arctan est impaire, $\phi(-1) = -\phi(1) = -\pi/2$. Donc,

$$\arctan x + \arctan(1/x) = -\pi/2, \ \forall x \in]-\infty, 0[.$$

$$\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2, \ \forall x \in]0, +\infty[.$$

Voir la section 10.3 pour quelques remarques historiques.

6. Application au calcul approché d'une solution d'équation $f(x) = 0$

Nous allons appliquer les idées du paragraphe précédent pour donner une valeur approchée de l'équation

$$x^3 + x - 14 = 0.$$

Nous commençons par nous ramener à une équation du type $f(x) = x$. En considérant une suite donnée par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, nous obtiendrons que cette suite tend vers le point fixe de f (et donc la solution de notre équation). D'où, pour n assez grand, u_n sera une bonne valeur approchée de cette solution. Mettons tout ceci en place dans notre cas.

Exercice.
1a) Montrer que l'équation $x^3 + x - 14 = 0$ a une unique solution (notée c) sur $\mathbb{R}$.
1b) Soit $f(x) = (14 - x)^{\frac{1}{3}}$. Montrer que c est l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}$.
2) On définit la suite (u_n) par $u_0 = 6$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-13 \leq u_n \leq 13$.
2b) Démontrer que pour tout $x \in]-\infty, 13]$, $|f'(x)| \leq 1/3$. En déduire, grâce au théorème des accroissements finis, que pour tout x et tout y dans $[-13, 13]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{3}|x - y|.$$

2c) Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - c| \leq \frac{1}{3}|u_n - c|,$$

puis par récurrence que

$$|u_n - c| \leq \frac{1}{3^n}|u_0 - c|$$

2d) Quelles est la limite de (u_n) ? Comment obtenir une valeur approchée de c à 10^{-2} près ?

Remarque. Le lecteur asticieux aura observé que le nombre c est aussi point fixe de la fonction (a priori) plus simple $g(x) = x^3 - 14$. Nous lui laissons reprendre la méthode précédente pour voir que notre choix de la fonction f est plus judicieux (en particulier, combien de termes des suites associées à f et g faut-il calculer pour avoir une valeur approchée de c à 10^{-5} ou 10^{-10} près ?).

7. Un bref aperçu historique

L'histoire de la dérivée est longue et étroitement liée à celle de la tangente. Pendant l'antiquité, la tangente est une droite qui ne touche la courbe qu'en un seul point. En utilisant la cinématique, Archimède avait construit la tangente à une spirale, tandis qu'Appolonius avait considéré le cas des coniques. Cependant, leurs travaux poursuivis par Torricelli et Roberval au XVIe sècle n'avaient débouché sur aucune méthode générale. Au cours du XVIIe siècle, le problème de la détermination de la tangente à une courbe devient important du fait de ses applications : construction d'horloge (Huygens 1673), recherche des extrema d'une fonction (Fermat 1638), vérification des lois de la gravitation en astronomie (Kepler, Newton),.........
Décrivons maintenant les approches de Leibniz et de Newton à travers l'exemple (élémentaire de nos jours) de la parabole d'équation $y = x^2$.

Si x varie de Δx, alors y devient

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

c'est-à-dire $\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.
La pente de la droite passant par (x, y) et $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ est égale à $2x + \Delta x$. D'où, quand Δx s'approche de 0, cette pente s'approche de celle de la tangente. Le problème est dans le "devient proche de 0".
Pour Leibniz (1684), on doit imaginer que Δx et Δy deviennent "infiniment petits". Alors, $(\Delta x)^2$ sera infiniment plus petit que Δx et Δy donc négligeable, et $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$.
Pour Newton (1671, mais publié en 1736), le terme $(\Delta x)^2$ doit être vu comme égal à 0 et donc $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$ (Méthode des fluxions)
Ces travaux vont être poursuivis par les Bernouilli, L'Hospital, Euler, D'Alembert,.....
Une première critique des "infiniment petits" apparaît en 1734 dans un article de l'évèque Berkeley. Comme nous l'avons déja vu au chapitre 2, ils seront remis en cause par Lagrange qui avait essayé de développer l'analyse sur la base des séries de Taylor que nous allons voir au chapitre suivant. On lui doit le nom "dérivée" et la notation $\dfrac{df}{dx}$.
En 1823, Cauchy critiqua cette approche et revint aux "infiniment petits". Il faut attendre les travaux de Bolzano (1817) et surtout de Weierstass (1861) pour voir apparaître la définition de la limite avec des ε, et donc la définition rigoureuse de la dérivée.
Le théorème de Rolle est dû ... à Rolle (1690) et celui des accroissements finis à Lagrange (1797). Il est clair d'après ce que nous avons vu précédemment que la formulation initiale n'était pas celle que l'on vous a donné en cours!

8. Quelques exercices sur la dérivabilité

8.1. Questions de cours. Vrai ou faux ?

(1) Toute fonction f dérivable en x_0 est continue en x_0.

(2) Si f est dérivable à droite et à gauche en x_0, alors f est dérivable en x_0.

(3) La dérivée de $f(x) = \cos 2x$ est $f'(x) = -\sin 2x$.

(4) Si f est dérivable sur $]0, 2[$ et si $f'(1) = 0$, alors f admet un maximum ou un minimum en 1.

Retour sur les théorèmes du cours

- Les énoncés suivants sont-ils corrects ? Si la réponse est non, les corriger.

(1) Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$, continue sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$. Alors, il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

(2) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe un unique $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- Peut-on appliquer le théorème de Rolle à la fonction $f(x)=|x|$ sur l'intervalle $[-1,1]$? Même question avec $f(x)=5x^2+3$ sur $[0,1]$.

- L'interprétation graphique suivante du théorème des accroissements finis est-elle correcte ? Si la réponse est non, la corriger.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c\in]a,b[$ tel que le graphe de f admet au point $C(c,f(c))$ une tangente qui passe par les points $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$.

8.2. **Quelques exercices.**

Exercice 1. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes.*

$$f(x)=\sin(2x+1);\ f(x)=4e^{5x+1};\ f(x)=\sqrt{x^2+2};\ f(x)=\sqrt{\cos x}.$$

$$f(x)=\frac{3x+1}{x-2};\ f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x+2}};\ f(x)=\sin x^2,\ f(x)=(\sin x)^2;\ f(x)=\frac{1}{1+\tan x}.$$

$$f(x)=\left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^2;\ f(x)=\tan(2x+3);\ f(x)=3e^{3x^2-1};\ f(x)=\ln(3x^2-1).$$

Exercice 2. *Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :*

$$\begin{aligned} f(x)&=\sin(\cos x) & h(x)&=\cos(\sin x)\\ g(x)&=\ln(x^2) & k(x)&=\ln(\ln(x))\\ l(x)&=\frac{ax+b}{cx+d} & m(x)&=\frac{1}{1+(\tan x)^2}\\ n(x)&=\sin\left(\frac{x^2}{\cos(x^2)}\right) & o(x)&=e^{e^x} \end{aligned}$$

Exercice 3. *Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :*

$$f(x)=\arctan(2x+3);\ f(x)=\arctan(x^2-1);\ f(x)=\arctan\sqrt{x}.$$

Exercice 4. *Calculer f' en fonction de g' dans les différents cas suivants :*

$$f(x) = g(ax+b)$$
$$f(x) = g(a+g(x))$$
$$f(x) = g(x+g(a))$$
$$f(x) = g(x+g(x))$$

Exercice 5. *Etudier la dérivabilité en* 0 *et, s'il existe, calculer le nombre dérivé en* 0 *des fonctions suivantes :*

$$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et } f(0)=0$$
$$g(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et } g(0)=0$$
$$\begin{cases} h(x) = -6x^2+2x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ h(x) = \ln(1+2x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} k(x) = \sin x & \text{si } x \geq 0 \\ k(x) = e^x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice 6. *Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x + \sqrt{|x^2-1|}$. Etudier la dérivabilité de f en* 0 *et en* 1.

Exercice 7. *Pour les deux fonctions suivantes, déterminer le réel m pour que la fonction f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.*

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-2}{x-1} & \text{si } x \geq 2 \\ f(x) = m(x^2-4) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} f(x) = x^3+x^2+(m^2-2)x & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = -2+\frac{x+2m}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 8. *Soient g et h deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables en* 0 *telles que $g(0) = h(0)$. On pose*

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < 0 \\ h(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable en 0. *(Indication : deviner la solution en raisonnant graphiquement.)*

Exercice 9. *Soit la fonction*

$$f(x) = \frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}.$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.
1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Déterminer a et b pour que la droite d'équation $y = 4x+3$ soit tangente à $\mathcal{C}$ au point I de coordonées $(0,3)$.

Exercice 10. *Tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'équation :*

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

À tout point M de $\mathcal{C}$, de coordonnées $(m, f(m))$, on associe la droite $D = (OM)$, en convenant que c'est la tangente en M à $\mathcal{C}$ lorsque $m = O$. Montrer que D recoupe $\mathcal{C}$ en un point dont on précisera les coordonnées.

Exercice 11. *Calculer les dérivées premières et secondes des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \cos(2x);\ f(x) = \tan x^2;\ f(x) = \ln(2x+1);\ f(x) = e^{x^2-3}.$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5};\ f(x) = \frac{2x+1}{3x-2};\ f(x) = \sin(ax+b) \text{ où } a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 12. *Déterminer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :*

$$f(x) = 4x^3 + x;\ f(x) = e^{2x};\ f(x) = \frac{1}{x}.$$

Exercice 13. *1) Déterminer et représenter le domaine de définition des fonctions suivantes :*

$$f(x,y) = \frac{x+4y}{1-xy}; f(x,y) = \ln(x^2 - y^2 - 4);\ f(x,y,z) = \sqrt{x - 4y + 3z - 5}.$$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}};\ f(x,y,z) = \frac{3x - y - 4}{x+y+z+5} - \frac{z-4x}{2x+3y-8z}.$$

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. Une ligne de niveau de f est une courbe d'équation $f(x,y) = k$ où $k \in \mathbb{R}$. Déterminer les lignes de niveau des fonctions suivantes.

$$f(x,y) = 2\sqrt{x^2+y^2};\ f(x,y) = \frac{x+4y+1}{x-y};\ f(x,y) = e^{2xy}.$$

3) Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes.

$$f(x,y) = x^3y + 5xy - 6x + 8y - 6;\ f(x,y) = \cos(xy);\ f(x,y) = \ln(5x + 8xy).$$

$$f(x,y) = 7e^{x^2y + 7xy^3};\ f(x,y) = \sqrt{5x - xy^2};\ f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

$$f(x,y,z) = xyz + x^2z + z^3y;\ f(x,y,z) = ze^{xy};\ f(x,y,z) = \sin(xy + yz + xz).$$

4) Calculer le laplacien des fonctions $f(x,y) = x^2 + 5y^2 - xy + 8$ et $g(x,y) = \ln(xy)$.
5) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (qui admettent des dérivées premières partout) telles que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.
6) Montrer que la fonction $u(x,y) = 5xy + 7x + 8y - 4$ est solution de l'équation $\Delta f = 0$.

Exercice 14. *1) Montrer que pour tout* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leq x$.
2) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$-x^2 \leq \cos x - 1 \leq 0.$$

3) De l'inégalité précédente et de la parité du cosinus, déduire que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$1 - x^2 \leq \cos x \leq 1.$$

Exercice 15. *Soit une fonction* f *dérivable sur* $[0, 2]$ *telle que pour tout* $x \in [0, 2]$, $f'(x) < 1/2$. *Faire un dessin et montrer que le coefficient directeur de la droite* (MN) *passant par deux points quelconques* M *et* N *du graphe de* f *est de coefficient directeur inférieur à* $1/2$.

Exercice 16. *Soit* f *la fonction définie sur* $]0, 1]$ *par* $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$ *si* $x \in]0, 1[$ *et* $f(1) = 1$. *On se propose d'étudier la dérivabilité de* f *en* 1. *A cette effet, on considère la fonction* g *définie sur* $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ *par* $g(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{1}{2}x^2$.
1a) Calculer $g'x)$ *et* $g''(x)$.
1b) Soit h *un élément fixé de* $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. *Etablir que, pour tout* x *de* $[h, 0]$, $g'(0) \leq g'(x) \leq g'(h)$. *En appliquant l'inégalité des accroissements finis à* g *sur* $[0, h]$, *démontrer que*

$$-\frac{1}{2}h^2 + \frac{h^3}{1+h} \leq \ln(1 + h) - h \leq -\frac{1}{2}h^2.$$

2a) Déterminer la limite de $\dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h}$ *quand* h *tend vers* 0 *par valeurs négatives.*
2b) Conclure.

Exercice 17. *On se propose d'étudier la suite* (u_n) *définie par, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^3}.$$

1) Vérifier que cette suite est croissante.
2) Soit la fonction f *définie par* $f(x) = 1/x^2$. *Vérifier que si* k *est un entier naturel non nul,*

$$\text{pour tout } x \in [k, k+1], \ -\frac{2}{k^3} \leq f'(x) \leq -\frac{2}{(k+1)^3}.$$

3) A l'aide de l'inégalité des accroisements finis, montrer que

$$-\frac{2}{k^3} \leq \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2} \leq -\frac{2}{(k+1)^3}.$$

Puis, démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \leq \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\right).$$

4) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\frac{9}{8} - \frac{1}{2(n+1)^2} \leq u_n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}.$$

5) En déduire que la suite (u_n) *est convergente et donner un encadrement de sa limite (que l'on ne cherchera pas à calculer).*

Exercice 18. *Un véhicule part à* 14 *heures et roule à une vitesse comprise entre* 60 *et* 80 *kilomètres par heure jusqu'a 17 heures.*
1) Donner un encadrement du nombre de kilomètres parcourus.
2) Retrouver dans l'énoncé de cet exercice les hypothèses du théorème des accroissements finis, puis retrouver le résultat du 1).

Exercice 19. *Une fonction* f *est dérivable sur* $[0,2]$. *On sait que* $f(0) = -1$ *et* $f(2) = 1$ *et que pour tout* $x \in [0,2]$,

$$\frac{1}{2} \leq f'x) \leq 2.$$

En appliquant le théorème des accroisements finis d'une part sur l'intervale $[0,x]$ *et d'autre part sur* $[x,2]$, *montrer que la courbe représentative de* f *est située à l'intérieur d'un parallélogramme à définir.*

Exercice 20. *Soit* f *une fonction dérivable sur* $]a,b[$ *avec* $0 < a < b$. *On suppose de plus que* f *est continue sur* $[a,b]$ *et que* $f(a) = f(b) = 0$. *Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de* f *qui passe par l'origine. On pourra introduire la fonction* g *définie par :* $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice 21. *Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

puis

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*,\ n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)a^n < \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n$$

En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(On pourra prendre $a = 1 + \frac{1}{n+1}$ *et* $b = 1 + \frac{1}{n}$*).* ***Remarque*** *: la suite ainsi définie est donc croissante, vers quoi converge-t-elle ?*

Exercice 22. *Soit* f *une fonction définie et continue sur* $[0, +\infty)$, *dérivable sur* $]0, +\infty)$, *et telle que* f' *est croissante et* $f(0) = 0$.

(1) *En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que* $\forall x > 0$, $f(x) \leq xf'(x)$.

(2) *En déduire que la fonction* g *définie sur* $]0,+\infty)$ *par* $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ *est croissante.*

Exercice 23. *Calculer, à l'aide du théorème des accroissements finis :*

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$$

Exercice 24. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies et continues sur* $[0,1]$*, dérivables sur* $]0,1[$ *et telles que :*

$$f(0)=g(0) \text{ et } f(1)=g(1)$$

On va montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ *tel que les représentations graphiques de* f *et de* $g+\lambda$ *sont tangentes.*

Remarque : $g+\lambda$ est la fonction $x\mapsto g(x)+\lambda$.

(1) *Soit* h *la fonction définie par* $h(x)=f(x)-g(x)$*. Montrer que* $\exists c\in[0,1]$ / $h'(c)=0$.

(2) *On prend* $\lambda=h(c)$*. Écrire l'équation de la tangente de* f*, puis de* $g+\lambda$*, au point d'abscisse* c*. Conclure.*

Exercice 25. *1) Quelle est la plus grande valeur de* $f(x)=-x^3+x^2$ *pour* $x\in[0,+\infty[$ *?*

2) Soit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *définie par* $f(x)=\dfrac{x-5}{x+1}$.

2a) Sans faire de calculs, expliquer pourquoi f *est bornée sur* $[0,2]$*. Calculer ensuite les extrema de* f *sur* $[0,2]$.

2b) La fonction f *est-elle bornée sur* $]-1,0]$ *? et sur* $[2,+\infty[$ *?*

3) Soit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *définie par* $f(x)=(x-1)e^x$*. Cette fonction est-elle bornée sur* $[-1,2]$ *? Si oui, déterminer les extrema de* f *sur* $[-1,2]$.

Exercice 26. *Trouver les valeurs de* m *pour lesquelles la fonction* f_m *définies sur* $\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ *par*

$$f_m(x)=\frac{x^2-mx}{x^2-4x+3}$$

(i) n'admette ni maximum, ni minimum ;
(ii) admette un maximun et un minimum ;
(iii) admette uniquement un minimum.

Exercice 27. *Voici un petit exercice qui date du début des années 1990.*
Un camion toupie appartenant à une entreprise de travaux publics ravitaille en béton un chantier en empruntant toujours le même trajet qui mesure aller-retour 150 km. Le prix d'un litre de gasoil est de 3,50F. Le chauffeur du camion est payé 62 *F de l'heure. La consommation* c *du véhicule, exprimée en litres de gasoil par heure, est une fonction de la vitesse moyenne* v *du camion donnée par*

$$c(v)=6+\frac{v^2}{100},$$

v *étant exprimée en km par heure.*

1a) Si la vitesse moyenne v *du camion est de* 50 *km par heure, calculer le coût de revient d'un trajet.*

1b) Plus généralement, exprimer en fonction de v le coût de revient d'un trajet. Vérifier le résultat du 1a).
2) Etudier les variations de la fonction f définie pour $x \in [40, 100]$ par

$$f(x) = 5,25x + \frac{12450}{x}.$$

3) Trouver la vitesse moyenne v pour que le coût d'u trajet soit minimal. Quel est alors ce coût ?

Exercice 28. *1) Parmi tous les rectangles de périmètre donné 30 cm, déterminer celui qui a la plus grande aire.*

2) Une personne désirant cloturer son terrain rectangulaire de $450m^2$ dont un côté s'appuie sur le bord d'une rivière, ce côté ne nécessitant pas de clôture. Déterminer les dimensions x et y du terrain pour la longueur de clôture soit minimale.

Exercice 29. *1) Pour des raisons obscures, le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre la le plus rapidemnt possible la maison côtière (point B).*

Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km par heure et à pied à la vitesse de 5 km par heure. Où doit-il accoster pour que le temps de parcours soit minimal ?
On supposera que la côte est rectiligne (droite Δ) et la dérive due au courant nulle.
2) Une ficelle de longueur l est coupée en deux morceaux ; avec l'un deux, on forme un cercle, et avec l'autre un carré. A quel endroit doit-on couper la ficelle pour que la somme des aires des domaines obtenus soit maximale ? (On pourra désigner par x le côté du carré, avec $0 < x < l/4$).

Exercice 30. *On dispose d'une feuille de carton rectangulaire de 80 centimètres de long et 50 centimètres d large, avec laquelle on veut fabriquer une boite ayant la forme d'un parallélépidède rectangle. Pour cela, on découpe dans la feuiile quatre carrés égaux, aux quatre coins (voir figure), puis on plie le carton suivant les segments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$ et $[D, A]$. On note x la mesure en centimètres du côté de chaque carré découpé.*

1) Préciser pour quelles valeurs de x, la boite est réalisable.

2) Pour quelle valeur de x le volume de la boite est maximale ? Quelles sont alors les dimensions et le volume de la boite ?

Exercice 31. *1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 - e^x$. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$. Démontrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe.*
2) A chaque réel λ, on associe la fonction $f_\lambda(x) = \lambda(x+1) - e^x$. On note $\mathcal{C}_\lambda$ sa courbe représentative.
2a) Déterminer l'ensemble des valeurs λ pour lesquelles f_λ admet un maximum.
2b) Soit M_λ le point d'ordonnée maximale de $\mathcal{C}_\lambda$. Démontrer que M_λ appartient à la courbe d'équation $y = xe^x$.

Exercice 32.
(1) *Montrer que l'on a $x\cos x - \sin x < 0$ si $x \in]0, \pi]$.*
(2) *Etudier le sens de variation de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi]$. Soient a et b des nombres réels tels que $0 < a < b < \pi$. Montrer que l'on a $\dfrac{a}{b} < \dfrac{\sin a}{\sin b}$.*

Exercice 33. *Soit p un entier positif.*
(1) *Montrer que la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{(1+x)^p}{1+x^p}$ a pour maximum 2^{p-1}.*
(2) *Soient a et b des nombres réels positifs. Montrer que l'on a*
$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Exercice 34. *1) En étudiant les variations de la fonction $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 3$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions x_0 et x_1 avec $-1 < x_0 < 0$, $0 < x_1 < 1$. Déterminer des valeurs approchées de ces solutions à 10^{-3} prés.*
2) Reprendre le même énoncé avec l'équation $2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 35. *Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.*
1) Quelle est l'ensemble de définition de f ? Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définiton. Interpréter graphiquement ces résultats.

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3) Trouver une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
4) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente T.
5) Lire graphiquement le nombre de solutions de l'équation $\ln x - \lambda x = 0$ *suivant les valeurs de λ.*

Exercice 36. *Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par*

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{(x-1)^2}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.
1a) Calculer la dérivée de f.
1b) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = -x - 1 - 2x \ln x$. Etudier les variations de g et en déduire le signe de $g(x)$.
1c) Etudier les variations de f.
2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définiton. Interpréter graphiquement ces résultats.
3) Indiquer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 37. *Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = xe^x$.*
1) Etudier la limite de f en $+\infty$.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ de f au point d'abscisse 0.
4) Tracer T et $\mathcal{C}$.

Exercice 38. *Soit la fonction f définie par*

$$f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 1}.$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représntative de f.
1) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement ces solutions.
2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3) Indiquer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0. *Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T.*
4) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 39. *Soit N_0 le nombre moyen de noyaux radioactifs présents dans un échantillon l̀a date $t = 0$. Le nombre moyen de noyaux présents dans cet échantillon à la date t est*

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

où λ est la constante radioactive (positive) caractéristique du nucléide considéré et du mode de désintégration.
1a) Pourquoi qualifie-t-on cette loi de "loi de décroissance" du nombre moyen de noyaux.
1b) La période radioactive T (ou demi-vie) est la durée nécessaire pour qu'un échantillon contenant en moyenne N noyaux n'en contienne plus que $N/2$. Montrer que

$T = (\ln 2)/\lambda$.
1c) En déduire que $N(t) = N_0 2^{-\frac{t}{T}}$.
1d) Calculer $N(t)$ *pour* $t = T$, $t = 2T$, $t = 3T$.
1e) Représenter la fonction $t \to N(t)$ *dans le cas du polonium 210 dont la période est 138 jours et en supposant que* $N_0 = 1250 \times 10^{16}$.
Les physiciens nucléaires s'intéressent plutôt au nombre de désintégrations par seconde ; ils appelent ce nombre l'activité, le notent $A(t)$ *et savent que*

$$A(t) = -N'(t)$$

L'unité d'activité est le becquerel (noté Bq).
2a) Vérifiez que $A(t) = \lambda N(t)$.
2b) Expliquer pourquoi la courbe d'équation $y = \ln A(t)$ *est une droite. Quelle est son coefficient directeur ?*
2c) L'iode 121 est utlisée en médecine ; sa période est de 8,1 jours. A l'instant 0, *on mesure que l'activité de l'échantillon est de* $2,2 \times 10^5$ *Bq. Calculer le nombre moyen de noyaux présents intialement puis au bout d'un an. Interprétez ce résultat en pratique.*

Exercice 40. *1) On considère la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x})$.
1a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 8\frac{e^x - 1}{e^{2x}}.$$

1b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 8\frac{2 - e^x}{e^{2x}}.$$

En déduire le signe de $f'(x)$.
1c) Etudier les limites de f *en* $-\infty$ *et en* $+\infty$.
1d) Donner le tableau de variation de f.
1e) Représenter la fonction f *(Unités : abscissse= 4cm et ordonnée = 2cm).*

2) On injecte à l'instant $t = 0$ *une substance dans le sang d'un animal. A l'instant* t *(*t *positif exprimé en secondes), la concentration* y *de la substance est* $y = 8(e^{-t} - e^{-2t})$.
On appelle "concentration" le rapport entre la quantite du liquide injecté et la quantité du sang qui le contient.
2a) En utilisant les résultats du 1), donner le tableau de variation de la concentration en fonction du temps t, t *positif exprimé en secondes.*
2b) Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale ? On donnera une valeur approchée par défaut de ce résultat en centièmes de secondes.
2c) Calculer au bout de combien de temps la concentration "retombe" au quart de sa valeur maximale. Donner ce résultat avec la même précision que dans la question 2b). Vérifier graphiquement en utilisant la question 1e).
2d) Donner une valeur approchée de $f(9)$. *En déduire qu'à l'instant* $t \geq 9$, *la concentrtaion est inférieure à* 10^{-3}.

Exercice 41. *Démontrer que* f *réalise une bijection de l'intervalle* I *sur un intervalle* J *que l'on précisera.*

(i) $f(x) = x^3 - 6x + 2$, $I = [-1, 1]$.
(ii) $f(x) = \sqrt{1-x}$, $I = [-2, 0]$.
(iii) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $I = [0, 7]$.

Exercice 42. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x+2} & si \quad x < -1 \\ 2x+3 & si \quad -1 \le x \le 0 \\ x^2 + 2x + 3 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

(1) *Tracer son graphe.*
(2) *Montrer que f est continue et strictement croissante.*
(3) *Donner les formules définissant sa fonction réciproque g et tracer le graphe de f et de g.*
(4) *Étudier la dérivabilité de f et de g.*

Exercice 43. *On pose $f(x) = \arctan x + \arctan 2x$ pour x réel.*

(1) *Étudier la fonction f et en tracer la représentation graphique.*
(2) *Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera. On notera g son application réciproque. Sans aucune étude de g, tracer sa représentation graphique dans le même repère que f.*

Exercice 44. *Montrer :*

$$\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$$

Ce genre de formule permet de calculer les décimales de π, voir la section 10.3.

Exercice 45. *Démontrer que :*

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 46. *Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1/2$ et pour tout entier n,*

$$u_{n+1} = \frac{5}{2} u_n (1 - u_n).$$

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{5}{2}x(1-x)$. Dressez le tableau de variation de f. Tracez la courbe représentative de f. Représentez graphiquement les premiers termes de la suite (u_n).
2) Soit $I = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{8}\right]$. Démontrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.
3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
4) Démontrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \le 5/8$.
5) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| u_{n+1} - \frac{3}{5} \right| \le \frac{5}{8} \left| u_n - \frac{3}{5} \right|.$$

Puis, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| u_{n+1} - \frac{3}{5} \right| \leq \frac{1}{10} \left(\frac{5}{8} \right)^n .$$

6) La suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 47. *1) Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$. Vérifier que 0 est point fixe de f.*
2) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Trouver un intervalle I contenant 0 et 1 tel que $f(I) \subset I$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
3) Montrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq 1/2$. En déduire grâce au théorème des accroissements finis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(u_n) - f(0)| \leq 1/2|u_n - 0|$, puis que $|u_{n+1}| \leq 1/2|u_n|$ et que $|u_n| \leq (1/2)^n$. Conclure.

Exercice 48. *Soit la fonction f définie par $f(x) = |x \ln x|$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.*
1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
2) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 \neq 1$ strictement positif et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Essayer d'étudier graphiquement la convergence de la suite (u_n) (suivant les valeurs u_0)). Pour quelles valeurs de u_0, la suite est-elle constante ?
3) On choisit $u_0 \in \left] 0, \frac{1}{e} \right[$.
3a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left] 0, \frac{1}{e} \right[$.
3b) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
3c) Conclure.
4) On choisit maintenant $u_0 \in \left] \frac{1}{e}, 1 \right[$. Prouver que $u_1 \in \left] 0, \frac{1}{e} \right[$. En déduire que (u_n) est croissante à partir du rang 1.
4a) Pour $u_0 > e$, montrer que la suite (u_n) est croissante.
4b) Prouver que si $x \geq e$, alors $f'(x) > 2$.
4c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - e \geq 2(u_n - e)$$

puis que

$$u_n - e \geq 2^n(u_0 - e).$$

4d) Quelle est, dans ce cas, la limite de (u_n) ?

Exercice 49. *Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x - 2 + 1/2 \ln x$.*
1a) Etudier les limites de g en 0 et $+\infty$.
1b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
1c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution l et une seule dans l'intervalle $[1, 2]$.
2) Soit f définie sur $I = [1, 2]$ par $f(x) = 2 - 1/2 \ln x$.
2a) Vérifier que l est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ (sur I).
2b) Etudier les variations de f et montrer que, pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.
2c) Montrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq 1/2$.

3) Soit (u_n) *la suite définie par* $u_0 = 1$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
3a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$.
3b) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1} - l| \leq 1/2|u_n - l|,$$

puis en déduire que

$$|u_n - l| \leq (1/2)^n.$$

3c) En déduire que (u_n) *converge vers* l.
3d) Trouver le plus petit entier naturel n *tel que* u_n *soit une valeur approchée de* l *à* 10^{-2} *près. En déduire un encadrement de* l *à* 10^{-2} *près.*

Exercice 50. *Soit la fonction* f *définie sur* $]0, +\infty[$ *par* $f(x) = e^{\frac{1}{2x}}$.
1a) Etudier les limites de f *en* 0 *et* $+\infty$.
1b) Etudier les variations de f *et dresser son tableau de variation.*
1c) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ *de* f. *Tracer la droite* D *d'équation* $y = x$. *Graphiquement, donner un encadrement d'amplitude* 1 *de l'abscisse* l *du point d'intersection de* $\mathcal{C}$ *et de* D.
2) Soit g *la fonction définie sur* $]0, +\infty[$ *par* $g(x) = f(x) - x$.
2a) Etudier les variations de g.
2b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ *admet une unique solution* l. *Etablir que*

$$5/4 \leq l \leq 3/2.$$

2c) Prouver que pour tout x *dans* $I = [5/4, 3/2]$, $f(x)$ *appartient aussi dans* I.
2d) Démontrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq 1/2$.
3) Soit (u_n) *la suite définie par* $u_0 = 5/4$ *et, pour tout entier naturel* n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
3a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n *est dans* I.
3b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - l| \leq 1/2|u_n - l|,$$

puis en déduire

$$|u_n - l| \leq (1/2)^{n+2}.$$

3c) En déduire que (u_n) *converge vers* l.
3d) Trouver un entier p *tel que* u_p *soit une valeur approchée de* l *à* 10^{-3} *près. Calculer alors cette valeur approchée.*

Exercice 51. *On considère l'équation*

$$(E) \quad x = \sin x + 0,25.$$

1) En étudiant la fonction F *définie par* $F(x) = x - \sin x - 0,25$, *montrer que (E) admet une solution unique* x_0 *sur* $\mathbb{R}$, *appartenant à l'intervalle* $[1,1; 1,3]$.
2) Soit maintenant la fonction f *définie par* $f(x) = \sin x + 0,25$.
2a) Montrer que $f([1,1; 1,3]) \subset [1,1; 1,3]$.
2b) Montrer que pour tout $x \in [1,1; 1,3]$,

$$0 < f'(x) < 1/2.$$

2c) En déduire que x_0 *est la limite de la suite définie par* $u_0 = 1,1$ *et pour tout entier* n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2d) Montrer que la suite (u_n) *est croissante et en déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n < x_0 < u_n + \frac{1}{10 \times 10^2}.$$

Donner une valeur approchée par défaut de x_0 *à* 10^{-4} *près.*

Exercice 52. *Des biologistes estiment que l'évolution d'une population animale qui s'installe dans un milieu nouveau obéit à la loi suivante :*

$$u_{n+1} = Ru_n - \frac{R-1}{E}u_n^2$$

où u_n *est l'effectif de la population à l'instant* n, E *est l'effectif d'équilibre de la population dans les conditions écologiques données,* R *est une constante qui dépend de la population et des conditions écologiques du milieu.*
Supposons que pour une espèce donnée et pour un milieu donné, on ait $E = 50$ *et* $R = 1,5$. *Etudions l'évolution de cette population lorsque l'effectif initial est* $u_0 = 5$.
1) Soit f *la fonction définie par* $f(x) = 1,5x - 0,01x^2$. *Dresser le tableau de variation de* f. *Démontrer que pour tout* $x \in I = [40, 50]$ $f(x)$ *est aussi dans* I. *Démontrer que pour tout* $x \in I$, $|f'(x)| \leq 0,7$.
2) Démontrer que
2a) Pour tout $n \geq 8$, $u_n \in I$;
2b) Pour tout $n \geq 8$, $|u_{n+1} - 50| \leq 0,7|u_n - 50|$.
2c) La suite (u_n) *converge vers* 50.

Nous allons dans le prochain exercice voir d'autres méthodes d'approximation de solutions d'équations.

Exercice 53. *Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation*

$$(E)\ x^3 - 3x - 4 = 0.$$

Soit f *la fonction définie par* $f(x) = x^3 - 3x - 4$.

Partie A (Existence d'une solution)
1) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ *admet dans* $\mathbb{R}$ *une unique solution* α *et que* $2 < \alpha < 3$.
2) Représenter le graphe $\mathcal{G}$ *de* f. *Placer sur l'axe des* x *le nombre* α, *et sur* $\mathcal{G}$ *les points* A *d'abscisse* 2 *et* B *d'abscisse* 3. *Unités conseillées : 20 cm sur* $0x$ *et 1 cm sur* $0y$.

Partie B (Méthode de la sécante)

1) Découverte d'un algorithme.
On choisit $u_0 = 2$ *comme première approximation de* α.
1a) Tracer la sécante (AB). *Cette droite* (AB) *coupe l'axe* $0x$ *en un point d'abscisse*

u_1. Contrôler sur le graphique l'inégalité $u_0 < u_1 < \alpha$.
1b) Soit A_1 le point de $\mathcal{G}$ d'abscisse u_1. La sécante (A_1B) coupe $0x$ en un point d'abscisse u_2. Quelle nouvelle inégalité obtient-on ?
1c) Comment obtenir une approximation u_3 de α encore meilleure ?
2) Approximations successives de α.
2a) Soit $c \in [2, \alpha[$ et soit M le point de $\mathcal{G}$ d'abscisse c. La droite BM coupe $0x$ en un point d'abscisse d. A l'aide de l'équation de (BM), exprimer d en fonction de c et de $f(c)$.
2b) Exprimer u_1 en fonction de u_0 et de $f(u_0)$. Exprimer u_2 en fonction de u_1 et de $f(u_1)$. Généraliser. Calculer le 15-ième terme de la suite ainsi obtenue.
2c) Une méthode de résolution d'équations du 3e degré publié par l'italien Girolamo Cardano en 1545 permet de prouver que le nombre

$$(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} + (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}$$

est solution de (E). Contrôler l'encadrment de α obtenue en 2b).

Partie C (Méthode des tangentes)

Nous allons maintenant décrire une méthode due à Newton (1671) dans laquelle on remplace les sécantes par les tangentes.

1) Découverte d'un algorithme.
On choisit $v_0 = 3$ comme première approximation de α.
1a) Tracer la tangente T_0 à $\mathcal{G}$ au point B d'abscisse $v_0 = 3$. La droite T_0 coupe $0x$ en un point d'abscisse v_1. Contrôler sur le graphique l'inégalité $\alpha < v_1 < v_0$.
1b) Tracer la tangente à $\mathcal{G}$ au point B_1 d'abscisse v_1. La tangente T_1 coupe $0x$ en un point d'abscisse v_2. Quelle nouvelle inégalité obtient-on ?
1c) Comment obtenir une approximation v_3 de α encore meilleure ?
2) Approximations succesives de α.
2a) Soit $c \in [2, \alpha[$ et soit M le point de $\mathcal{G}$ d'abscisse c. La tangente T à $\mathcal{G}$ au point M coupe $0x$ en un point d'abscisse d. A l'aide de l'équation de T, exprimer d en fonction de c, $f(c)$ et de $f'(c)$.
2b) Exprimer v_1 en fonction de v_0, $f(v_0)$ et de $f'(v_0)$. Exprimer v_2 en fonction de v_1, $f(v_1)$ et de $f'(v_1)$. Généraliser. Calculer le 4-ième terme de la suite ainsi obtenue et vérifier que ce nombre est une approximation de α à 10^{-6} près.

CONCLUSION : Comparer les deux méthodes.

9. Compléments : Dérivées successives

Nous avons déja défini les dérivées successives d'une fonction. Nous allons dans cette section donner une règle (formule de Leibniz) donnant $(fg)^{(n)}$ en fonctions des dérivées d'ordres inférieures. Avant de l'énoncer, faisons quelques rappels de dénombrement.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il y ait n boules numérotées dans une urne. Nous fixons un entier naturel p compris entre 0 et n. Nous tirons au hasard une poignée de p boules. Combien y-a-t'il de tirages possibles ? Ce nombre est

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Rappelons que $n! = n.(n-1)......3.2.1$, c'est à dire $n!$ est le produit de tous les entiers naturels entre 1 et n. Par exemple, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$. Par convention, $0! = 1$ et donc $C_n^0 = 1$. Notons que $C_n^k = C_n^{n-k}$. Avant d'expliquer comment calculer les C_n^k à l'aide du triangle de Pascal, donnons une interprétation (qui peut servir de définition) des C_n^p. Pour cela, considérons un ensemble à n éléments (par exemple, $E = \{1, 2, .., n-1, n\}$). Quel est le nombre de parties de E contenant exactement p éléments ? Ce nombre est C_n^p. En effet, construire un ensemble à p éléments de E revient à tirer une poignée de p éléments parmi n et nous nous retrouvons alors dans notre situation du tirage de boules dans une urne.
Les C_n^p sont liés par la formule de récurrence (appelée formule de Pascal) suivante :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

Donnons deux démonstrations de ce résultat.

Démonstration 1. Calculons $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ à l'aide de la définition et en remarquant que $(n-p)! = (n-p).(n-p-1)!$ et $p! = p.(p-1)!$:

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p &= \frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-p-1)!p!} \\ &= \frac{p.(n-1)! + (n-p)(n-1)!}{(n-p)!p!} \\ &= \frac{(p+(n-p)).(n-1)!}{(n-p)!p!} \\ &= \frac{n.(n-1)!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p. \end{aligned}$$

Démonstration 2. C_n^p est le nombre de parties à p éléments dans $E = \{1, 2, ..., n-1, n\}$. Donc,

$$C_n^p = \alpha + \beta$$

où α est le nombre de parties de p éléments dans E **contenant l'élément** 1 et β est le nombre de parties de p éléments dans E **ne contenant pas l'élément** 1. Or, pour obtenir les parties de p éléments contenant l'élément 1, il faut tirer $p-1$ éléments parmi $n-1$ (qui sont 2, 3, .., $n-1$, n), c'est à dire compter tous les ensembles contenant $p-1$ éléments choisis parmi $n-1$ éléments donc $\alpha = C_{n-1}^{p-1}$. De même, pour obtenir les parties de p éléments ne contenant pas l'élément 1, il faut tirer p éléments parmi $n-1$ (qui sont 2, 3, .., $n-1$, n), c'est à dire compter tous les ensembles contenant p éléments choisis parmi $n-1$ éléments donc $\beta = C_{n-1}^p$. Nous en déduisons $C_n^p = \alpha + \beta = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.

La formule de Pascal va nous permettre de construire le triangle de Pascal.
$(n=0)$ 1
$(n=1)$ 1 1
$(n=2)$ 1 2 1
$(n=3)$ 1 3 3 1
$(n=4)$ 1 4 6 4 1
$(n=5)$ 1 5 10 10 5 1

Si nous prenons la ligne $n=4$, les nombres donnés sont successivement C_4^0, C_4^1, C_4^2, C_4^3, C_4^4. Nous avons déja vu que $C_4^0 = C_4^4 = 1$. Les autres nombres s'obtiennent à partir de la ligne précédente en appliquant la formule de Pascal. Par exemple, $C_4^1 = C_3^0 + C_3^1$, c'est à dire C_4^1 s'obtient comme la somme de celui qui est au dessus de lui (c'est à dire 3) et du voisin de gauche de celui-ci (c'est à dire 1). Donc, $C_4^1 = 6$.

Théorème 8 (Formule de Liebniz). *Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur I. Alors, le produit fg est n fois dérivable sur I et*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Explicitons la conclusion :

$$(fg)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} g^{(0)} + C_n^1 f^{(n-1)} g^{(1)} + \ldots. + C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)} + \ldots.. + C_n^{n-1} f^{(1)} g^{(n-1)} + C_n^n f^{(0)} g^{(n)}.$$

Ainsi, nous sommons tous les termes de la forme $C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$ pour tout k compris entre 0 et n. Notons que nous passons d'un terme au suivant en dérivant f une fois de moins et g une fois de plus, de sorte que la somme des ordres de dérivation est toujours égal à n.
Exemple. Reprenons les fonctions f et g des exemples 1 et 2 donnés à la fin de la section 1 (c'est à dire $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^3$). Supposons que nous souhaitons calculer $(fg)^{(4)}$. La formule de Leibniz donne

$$(fg)^{(4)} = C_4^0 f^{(4)} g^{(0)} + C_4^1 f^{(3)} g^{(1)} + C_4^2 f^{(2)} g^{(2)} + C_4^3 f^{(1)} g^{(3)} + C_4^4 f^{(0)} g^{(4)}.$$

D'où, d'après le triangle de Pascal (en gras, les C_4^k donnés par le triangle de Pascal),

$$(fg)^{(4)} = \mathbf{1} f^{(4)} g^{(0)} + \mathbf{4} f^{(3)} g^{(1)} + \mathbf{6} f^{(2)} g^{(2)} + \mathbf{4} f^{(1)} g^{(3)} + \mathbf{1} f^{(0)} g^{(4)}.$$

Ainsi, en utilisant les calculs faits précédemment, nous obtenons pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(fg)^{(4)}(x) = e^x (x^3 + 12x^2 + 36x + 24).$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence en utilisant la formule de Pascal. Afin de bien comprendre la formule de Leibniz, nous allons la vérifier non seulement pour $n=0$, mais aussi pour $n=1$ et $n=2$. En gras apparaissent les nombres de la ligne du triangle de Pascal correspondante.
Pour $n=0$, $(fg)^{(n)} = fg$ par convention, soit

$$(fg)^{(0)} = fg = \mathbf{1} f^{(0)} g^{(0)}.$$

Pour $n = 1$, la formule de dérivation d'un produit donne $(fg)^{(n)}(fg)' = f'g + fg'$, soit

$$(fg)^{(1)} = \mathbf{1}f^{(1)}g^{(0)} + \mathbf{1}f^{(0)}g^{(1)}.$$

Pour $n = 2$, il nous faut dériver $(fg)'$. Or, d'après la régle sur la dérivation d'un produit,

$$\begin{aligned}(fg)^{(2)} = ((fg)')' &= (f'g + fg')' \\ &= (f'g)' + (fg')' \\ &= f''g + f'g' + f'g' + fg'' \\ &= f''g + 2f'g' + fg''.\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$(fg)^{(2)} = \mathbf{1}f^{(2)}g^{(0)} + \mathbf{2}f^{(1)}g^{(1)} + \mathbf{1}f^{(0)}g^{(2)}.$$

Supposons que la dérivée n-ième, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, de fg soit donné par

$$(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Nous voulons maintenant estimer $(fg)^{(n+1)}$ et pour cela, nous allons dériver $(fg)^n$ grace à la formule de récurrence. Ce calcul est similaire au passage de $n = 1$ à $n = 2$.

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} = ((fg)^n)' &= \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{n} (C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)})' \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k+1)}.\end{aligned}$$

Nous devons maintenant regrouper les termes.

Terme en $f^{(n+1)}g^{(0)}$: il y en a un seul qui vient de la première somme pour $k = 0$ et qui sort avec le coefficient C_n^0, c'est à dire 1. Donc, le coefficient de $f^{(n+1)}g^{(0)}$ dans la somme est $C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0$.
Terme en $f^{(n)}g^{(1)}$: il y en a un qui vient de la première somme pour $k = 1$ et qui sort avec un coefficient C_n^1 et un qui vient de la seconde somme pour $k = 0$ et qui sort avec un coefficient C_n^0. Donc, le coefficient de $f^{(n)}g^{(1)}$ dans la somme est $C_n^1 + C_n^0 = C_{n+1}^1$ (d'après la formule de Pascal).
Terme en $f^{(n+1-p)}g^{(p)}$: il y en a un qui vient de la première somme pour $k = p$ et qui sort avec un coefficient C_n^p et un qui vient de la seconde somme pour $k = p - 1$ et qui sort avec un coefficient C_n^{p-1}. Donc, le coefficient de $f^{(n+1-p)}g^{(p)}$ dans la somme est $C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p$ (d'après la formule de Pascal).

Terme en $f^{(0)}g^{(n+1)}$ *:* il y en a un seul qui vient de la deuxième somme pour $k = n$ et qui sort avec le coefficient C_n^n, c'est à dire 1. Donc, le coefficient de $f^{(0)}g^{(n+1)}$ dans la somme est $C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}$.

Nous en déduisons $(fg)^{(n+1)} = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p f^{(n+1-p)} g^{(p)}$. D'où, la formule de Leibniz est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Exercice 54. *Déterminer la dérivée n-ième des fonctions suivantes (on pourra être amené à utiliser la formule de Leibniz) :*

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2} \qquad h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$i(x) = 3x^k \qquad j(x) = \cos(2x) \qquad k(x) = xe^x$$

$$l(x) = \sin(x)e^{2x} \qquad m(x) = (x^3 + 2x - 7)e^x \qquad n(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

Pour le dernier exemple, on pourra remarquer que :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

10. Compléments : Fonctions arcsin et arccos

Nous allons reprendre ce que nous avons fait pour la fonction tan dans le cas de deux autres fonctions trigonométriques, à savoir les fonctions sinus et cosinus.

10.1. **Fonction** arcsin**.** Notons, pour commencer, que la fonction sin n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Il faut d'abord restreindre l'ensemble d'arrivée et considérer pour celui-ci $[-1, 1]$, puisque $\{\sin x, x \in \mathbb{R}\} = [-1, 1]$. De plus, il faut restreindre l'ensemble de départ, car 0 a une infinité d'antécédents dans $\mathbb{R}$.

Notons $f(x) = \sin x$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos x$. Donc, f est strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$.
Remarque. La fonction sin est strictement croissante sur beaucoup d'autres intervalles de $\mathbb{R}$. Le choix que nous avons fait est celui qui est fait usuellement.

Comme f est aussi continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$, f est une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $f([-\pi/2, \pi/2]) = [f(-\pi/2), f(\pi/2)] = [-1, 1]$. Elle admet donc une bijection réciproque, notée arcsin, qui est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$. En fait, arcsin : $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est telle que, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$y = \arcsin x \text{ si et seulement si } (x = \sin y \text{ ET } -(\pi/2) \le y \le \pi/2)\,.$$

Nous en déduisons le tableau de valeurs suivant.

$\arcsin x$	0	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	1	-1
x	0	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$-\pi/2$

La fonction arcsin est impaire. En effet, puisque la fonction sin est impaire, nous avons pour tout $x \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned} y = \arcsin(-x) &\iff (x = \sin(-y) \text{ ET } -(\pi/2) \leq y \leq \pi/2) \\ &\iff (x = -\sin y \text{ ET } -(\pi/2) \leq y \leq \pi/2) \\ &\iff (-x = \sin y \text{ ET } -(\pi/2) \leq y \leq \pi/2) \\ &\iff y = -\arcsin(x). \end{aligned}$$

Donc, $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$.

La fonction arcsin n'est pas dérivable en $x = \sin t$ ($t \in [-\pi/2, \pi/2]$) si $f'(t) = \cos t = 0$, c'est à dire si $t = -\pi/2$ et $t = \pi/2$. Donc, la fonction arcsin n'est pas dérivable en $x = \sin(-\pi/2) = -1$ et $x = \sin(\pi/2) = 1$. De plus, toujours d'après le théoréme 2, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Nous allons maintenant montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(*)\ \ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Commençons par rappeller (même si seulement la première nous sera utile ici) que, d'après les propriétés générales des applications réciproques vues dans la section 4.3 du chapitre IV,

$$\arcsin(\sin x) = x, \forall x \in [-\pi/2, \pi/2],$$

$$\sin(\arcsin x) = x, \forall x \in [-1,1].$$

Attention ici aux ensembles sur lesquels les propriétés sont vraies!

Démontrons maintenant (*). Comme $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$, en appliquant cette formule à $u = \arcsin x$ et en utilisant ce qui précède, il vient

$$\cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = \cos^2(\arcsin x) + x^2 = 1.$$

Nous en déduisons que $\cos^2(\arcsin x) = 1 - x^2$. Or, si $x \in]-1,1[$, $\arcsin x \in]-\pi/2, \pi/2[$, donc $\cos(\arcsin x) \geq 0$. Donc, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$. Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, arcsin est dérivable et

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Graphes de sin et de arcsin

10.2. **Fonction** arccos**.** Notons $f(x) = \cos x$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x$. Donc, f est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.
Remarque. La fonction cos est strictement décroissante sur beaucoup d'autres intervalles de $\mathbb{R}$. Le choix que nous avons fait est celui qui est fait usuellement.

Comme f est aussi continue sur $[0, \pi]$, f est une bijection de $[0, \pi]$ dans $f([0, \pi]) = [f(\pi), f(0)] = [-1, 1]$. Elle admet donc une bijection réciproque, notée arccos, qui est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$. En fait, arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ est telle que, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$y = \arccos x \text{ si et seulement si } (x = \cos y \text{ ET } 0 \leq y \leq \pi).$$

Nous en déduisons le tableau de valeurs suivant.

$\arccos x$	0	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	1	-1
x	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$	0	π

La fonction arccos n'est pas dérivable en $x = \cos t$ ($t \in [0, \pi]$) si $f'(t) = -\sin t = 0$, c'est à dire si $t = 0$ et $t = \pi$. Donc, la fonction arccos n'est pas dérivable en $x = \cos(\pi) = -1$ et $x = \cos(0) = 1$. De plus, toujours d'après le théoréme 2, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$(\arccos)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}.$$

Nous allons maintenant montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$(*) \ \ \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Commençons par rappeler (même si seulement la première nous sera utile ici) que, d'après les propriétés générales des applications réciproques vues dans la section 4.3 du chapitre IV,

$$\arccos(\cos x) = x, \forall x \in [0, \pi],$$

$$\cos(\arccos x) = x, \forall x \in [-1, 1].$$

Démontrons maintenant (*). Comme $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$, en appliquant cette formule à $u = \arccos x$ et en utilisant ce qui précède, il vient

$$\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = x^2 + \sin^2(\arccos x) = 1.$$

Nous en déduisons que $\sin^2(\arccos x) = 1 - x^2$. Or, si $x \in]-1, 1[$, $\arccos x \in]0, \pi[$, donc $\sin(\arccos x) \geq 0$. Donc, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$. Ainsi, pour tout $x \in]-1, 1[$, arccos est dérivable et

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Graphes de cos et de arccos

Montrons que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Pour cela, posons, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\phi(x) = \arcsin x + \arccos x$. D'après ce qui précède, ϕ est dérivable sur $]-1, 1[$ et, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0.$$

Donc, ϕ est constante sur $]-1, 1[$. Or, $\phi(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \pi/2 = \pi/2$. Donc, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\phi(x) = \pi/2$. De plus, $\phi(-1) = \phi(1) = \pi/2$. Donc, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\phi(x) = \pi/2$, c'est à dire $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

10.3. **Remarques historiques.** Les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques ont été étudiées très tôt. Par exemple, John Machin (publié en 1706) utilisait la formule

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

pour déterminer les 100 premières décimales de π (et sans calculatrice!). Bien plus tard, en 1973, Guilloud et Bouyer obtiennent un million de décimales sur l'ordinateur CDC 7600 à l'aide des formules suivantes dues à Gauss et à Störmer :

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\left(\frac{1}{18}\right) + 8\arctan\left(\frac{1}{57}\right) - 5\arctan\left(\frac{1}{239}\right),$$

$$\frac{\pi}{4} = 6\arctan\left(\frac{1}{8}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{57}\right) + \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

En 2002, Kanada a calculé 1 241 100 000 000 décimales de π grâce à deux formules semblables à celle de Machin ci-dessus (et d'un bon ordinateur, ainsi qu'un bon algorithhme). Le concours continue ...

10.4. **Quelques exercices.**

Exercice 55. *Faire l'étude complète et tracer le graphe de la fonction définie par* $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

Exercice 56. *Montrer :*

$$\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

Exercice 57. *Comparer les fonctions*

$$f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2} \text{ et } g(x) = \arccos x$$

Exercice 58. *Simplifier :*

$$f(x) = \arccos\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$g(x) = \arctan(cotan 2x)$$

Exercice 59. *Résoudre l'équation :*

$$\arccos x = \arcsin x$$