COURS DE MAITRISE
ESPACES FONCTIONNELS ET OPÉRATEURS
CHAPITRE I : ESPACES L^p
VERSION PRÉLIMINAIRE

Le but de ce premier chapitre est de revoir des notions et résultats d'analyse fonctionnelle vus au premier semestre dans le cadre des espaces L^p (qui, eux, ont été vus en licence).

1. Rappels de théorie de la mesure

1.1. **Espace mesuré.** Soit X un ensemble. Une collection $\mathcal{M}$ de sous-ensembles de X est une tribu (ou encore une σ-algèbre) si les axiomes suivants sont satisfaits :

(T1) Si $A \in \mathcal{M}$, alors le complémentaire de A dans X, noté A^c, est dans $\mathcal{M}$;

(T2) Si (A_i) est une famille (au plus) dénombrable d'éléments de $\mathcal{M}$, alors l'union $\bigcup_i A_i$ est dans $\mathcal{M}$;

(T3) $X \in \mathcal{M}$.

On dit alors que X (ou $(X, \mathcal{M})$) est mesurable et les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés les ensembles mesurables de X (Attention ! il n'y a pas de mesure !!!!!!!!). Notons que les propriétés (T1), (T2) et (T3) impliquent que l'ensemble vide $\emptyset$ est dans la tribu $\mathcal{M}$ et que, si (A_i) est une famille (au plus) dénombrable d'éléments de $\mathcal{M}$, alors l'intersection $\bigcap_i A_i$ est dans $\mathcal{M}$.
Soit $\mathcal{F}$ une collection de sous-ensembles de X. On appelle tribu engendrée par $\mathcal{F}$ l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{F}$. Par exemple, si $\mathcal{F}$ est la collection des ouverts (pour la topologie euclidienne) de $X = \mathbb{R}^n$ (ou la collection des ouverts d'un espace topologique quelconque X), la tribu engendrée par $\mathcal{F}$ s'appelle la tribu borélienne de X (on la note souvent $\mathcal{B}(X)$), et ses éléments les boréliens de X.

Une mesure (positive) μ, définie sur une tribu $\mathcal{M}$ de l'ensemble X, est une fonction $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ telle que

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(M2) Si $(A_i)_i$ est une famille (au plus) dénombrable d'éléments disjoints de $\mathcal{M}$, alors
$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i).$$

On déduit de (M1) et (M2) les propriétés suivantes d'une mesure

(M3) Si $A \subset B$ avec A, $B \in \mathcal{M}$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$;

(M4) Si (A_i) est une collection dénombrable d'éléments de $\mathcal{M}$ telle que $A_1 \subset A_2 \subset A_3$......, alors $\lim_{j\to+\infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_i A_i\right)$;

(M5) Si (A_i) est une collection dénombrable d'éléments de $\mathcal{M}$ telle que $A_1 \supset A_2 \supset A_3$...... et $\mu(A_1) < +\infty$, alors $\lim_{j\to+\infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcap_i A_i\right)$;

Si X est un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{M}$ et d'une mesure μ définie sur $\mathcal{M}$, le triplet $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est appelé espace mesuré. Si $X = \mathbb{R}^n$ (ou si X est un espace topologique) et $\mathcal{M}$ est la tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$, une mesure μ (telle que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré) est appelée une mesure borélienne.

Rappelons un procédé de construction de mesure dû à Carathéodory. Soit X un ensemble. Une mesure extérieure λ sur X est une fonction $\lambda : \{A; A \subset X\} \to [0, +\infty]$ qui satisfait les axiomes suivants :

(ME1) $\lambda(\emptyset) = 0$;

(ME2) Si $A \subset B \subset X$ alors $\lambda(A) \leq \lambda(B)$;

(ME3) Si $A_1 \subset A_2 \subset$ .... $\subset X$, alors

$$\lambda\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i \lambda(A_i).$$

On dira que $A \subset X$ est λ-mesurable si $\lambda(E) = \lambda(E \cap A) + \lambda(E \setminus A)$ pour tout $E \subset X$. Alors, la collection $\mathcal{M}$ des ensembles λ-mesurables est une tribu, et si on définit $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ par $\mu(A) = \lambda(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}$, alors μ est une mesure au sens précédent, c'est à dire μ vérifie (M1),....,(M5). La définition de $\mathcal{M}$ est naturelle, puisqu'une mesure extérieure n'est pas en général finiment additive, c'est à dire l'égalité $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ (avec A et B disjoints) n'est pas vraie en général (alors que c'est le cas pour une mesure).

Réciproquement, soit μ une mesure sur X (c'est à dire μ vérifie (M1) et (M2)) définie sur une tribu $\mathcal{M}$ de X. Posons $\lambda(A) = \inf\{\mu(B); A \subset B \in \mathcal{M}\}$. Alors, λ est une mesure extérieure au sens précédent (c'est à dire vérifie (ME1), (ME2) et (ME3)).

Une mesure μ sur un ensemble X est finie si $\mu(X) < +\infty$. Dans ce cas, $\mu(X)$ s'appelle la masse totale de μ. Si cette masse vaut 1, μ est une mesure de probabilité. Une mesure μ sur un espace métrique (X, d) est localement finie si pour tout $x \in X$, il existe $r > 0$ tel que $\mu(B(x, r)) < +\infty$. La mesure μ est finie sur les compacts si pour tout compact K de l'espace métrique (X, d), $\mu(K) < \infty$.

Supposons maintenant que X est un espace métrique séparable localement compact et soit μ une mesure borélienne sur X. Alors, il existe un plus grand ouvert O tel que $\mu(O) = 0$. Son complémentaire est appelé le support de μ et noté $\mathrm{Supp}(\mu)$. Montrons l'existence du support de μ et pour cela, considérons l'ensemble $\mathcal{U}$ de tous les ouverts Ω de X tel que $\mu(\Omega) = 0$. Notons que $\mathcal{U}$ est non vide, puisque $\emptyset \in \mathcal{U}$. Posons $O = \bigcup_{\Omega \in \mathcal{U}} \Omega$. Alors, O est ouvert. Soit K contenu dans O. Alors, K peut être recouvert par des éléments de $\mathcal{U}$. Si de plus, K est compact, on peut le recouvrir par une famille finie d'éléments de $\mathcal{U}$. On en déduit, d'après la propriété (M2) de μ, que $\mu(K) = 0$ pour tout compact K contenu dans O. Puisque X est séparable, localement compact, il en de même de O. Donc, O est σ-compact (voir la proposition ci-dessous), c'est à dire que O peut-être recouvert par un nombre dénombrable de compacts K_n (dont on a déja vu qu'ils étaient tous de mesure nulle). On en déduit que $\mu(O) \leq \sum_n \mu(K_n) = 0$. Il nous reste à montrer le résultat suivant.

Proposition 1. *Soit Y un espace métrique séparable, localement compact. Alors, Y est σ-compact*

Démonstration. Soit Y comme dans la proposition. Puisque Y est séparable, il existe (y_n) une famille dense de Y. Soit $A = \{(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*; \overline{B(y_n, \frac{1}{p})} \text{ est compact } \}$. Montrons que $\mathcal{F} = (\overline{B(y_n, \frac{1}{p})})_{(n,p)\in A}$ recouvre Y. Pour cela, considérons $y \in Y$. Comme Y est localement compact, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B(y,r)}$ est compact. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{p} < \frac{r}{2}$ et soit y_n tel que $d(y, y_n) < \frac{1}{p}$. Alors, $y \in \overline{B(y_n, r)} \subset \overline{B(y, r)}$. Donc, $\overline{B(y_n, r)}$ est compact et y appartient à un élément de $\mathcal{F}$. □

On appelle mesure de Radon positive sur X une forme linéaire positive λ sur l'espace (noté $C_0(X)$) des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ continues à support compact, c'est à dire λ est une forme linéaire sur $C_0(X)$ telle que pour tout $f \in C_0(X)$, $f \geq 0 \Longrightarrow \lambda(f) \geq 0$. Si μ est une mesure borélienne finie sur les compacts de X, on peut vérifier que l'application λ définie sur $C_0(X)$ par $\lambda(f) = \int f d\mu$ pour tout $f \in C_0(X)$ est une mesure de Radon positive sur X. Un résultat plus difficile (appelé théorème de Radon-Riesz) est que la réciproque est vraie, a savoir que pour tout mesure de Radon positive λ sur X, il existe une et une seule mesure de Borel μ finie sur les compacts telle que $\lambda(f) = \int f d\mu$ pour tout $f \in C_0(X)$. Cette mesure de Borel vérifie les propriétés de régularité suivantes. Pour tout borélien A de X (de mesure finie),

$$(1) \quad \mu(A) = \inf\{\mu(O); O \text{ ouvert et } A \subset O\} = \sup\{\mu(K); K \text{ compact et } A \supset K\}.$$

Dans la suite, une mesure de Radon sur un espace métrique localement compact X sera une mesure borélienne finie sur les compacts et vérifiant les propriété de régularité (1), c'est à dire qu'on identifiera la mesure de Radon à la mesure borélienne associée. Nous renvoyons à [Rud] pour une preuve du théorème de Radon-Riesz et pour plus de détails sur les mesures de Radon.

Exemples fondamentaux.
1) Mesure de Dirac
Soit (X, d) un espace métrique et soit $x_0 \in X$. Pour tout sous-ensemble A de X, on

pose

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 \notin A \\ 1 & \text{si } x_0 \in A \end{cases}$$

Alors, δ_{x_0} est une mesure de Radon (de masse 1) sur X, appelée mesure de Dirac en x_0. Son support est $\{x_0\}$.
2) Mesure de comptage
Pour tout ensemble fini $A \subset \mathbb{N}$, notons card$A$ son cardinal, c'est à dire le nombre de ses éléments. Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{N}$, posons

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{card}A & \text{si card}A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors, μ est une mesure de Radon, appelée mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. Son support est $\mathbb{N}$.
3) Mesure de Lebesgue (dans $\mathbb{R}^n$).
Nous ne rappelons pas la construction de cette mesure (notée $\mathcal{L}_n$), mais nous allons en donner quelques propriétés importantes. La mesure $\mathcal{L}_n$ est borélienne, elle est invariante par translation, et pour tout boule $B(x,r)$ de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}_n(B(x,r)) = r^n \mathcal{L}_n(B(0,1)) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{n\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Ces propriétés caractérisent la mesure de Lebesgue. Ceci découle du résultat classique suivant de théorie de la mesure. Une mesure borélienne μ sur un espace métrique (X,d) est dite uniformément distribuée si $0 < \mu(B(x,r)) = \mu(B(y,r)) < +\infty$ pour tout x, $y \in X$ et tout $r > 0$.

Théorème 2. *Si μ et ν sont deux mesures de Borel uniformément distribuées sur un espace métrique séparable (X,d), alors il existe $C \in \mathbb{R}^{+*}$ telle que $\mu = C\nu$.*

Pour une preuve de ce résultat, voir [Mat]. Evidemment, le fait que les boules soient de mesure de Lebesgue finie implique que celle-ci est localement finie. D'autre part, elle est σ-finie, c'est à dire qu'il existe une famille dénombrable d'ensembles mesurables A_1, .., A_i, ... tels que $\mu(A_i) < +\infty$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}^n = \cup_i A_i$ (Pour voir cela, considérer une famille disjointe de cubes de longueur de côté 1). La mesure de Lebesgue est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^n$ dont le support est $\mathbb{R}^n$. D'autre part, la mesure de Lebesgue a des propriétes intéressantes de densité. Ainsi, si E est un borélien de $\mathbb{R}^n$, alors pour $\mathcal{L}_n$-presque tout $x \in E$,

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}_n(B(x,r) \cap E)}{\mathcal{L}_n(B(x,r))} = 1$$

et pour $\mathcal{L}_n$-presque tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$,

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}_n(B(x,r) \cap E)}{\mathcal{L}_n(B(x,r))} = 0.$$

Pour une preuve de ce résultat, voir [Rud].

Exemples plus exotiques, mais très utiles

4) Mesures de Hausdorff
Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et soit $s \in [0,n]$. Pour tout $\delta > 0$, on pose

$$H^s_\delta(E) = \inf\left\{\sum_i (\mathrm{diam} U_i)^s ; E \subset \bigcup_i U_i, \mathrm{diam} U_i \leq \delta\right\}.$$

On définit $H^s(E) = \lim_{\delta\to 0} H^s_\delta(E)$. Alors, H^s est une mesure (extérieure) sur $\mathbb{R}^n$, appelée mesure de Hausdorff de dimension s. Pour $s = n$, cette mesure est égale (à une constante multiplicative près) à la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^n$. Pour $s < n$, la mesure de Hausdorff H^s n'est pas une mesure de Radon dans $\mathbb{R}^n$. En effet, si $s \in [0, n[$, pour toute boule fermée B de $\mathbb{R}^n$, $H^s(B) = +\infty$. En fait, $H^s(A)$ est finie si A est de "dimension" s (attention ! Ici, "dimension" ne signifie pas dimension d'espace vectoriel ou dimension topologique). Ainsi, pour une courbe de Jordan Γ de $\mathbb{R}^n$, $H^1(\Gamma)$ est sa longueur. Pour des surfaces régulières S de $\mathbb{R}^n$, $H^2(S)$ est la surface de S. Si $C \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble de Cantor triadique, la bonne mesure pour C est $H^{\frac{\log 2}{\log 3}}$. Enfin, notons que H^0 est la mesure de comptage dans $\mathbb{R}^n$. Pour plus de détails, voir [Mat] ou [Fa].

5) Mesure de Haar sur un groupe topologique
Soit G un groupe topologique compact. Alors, il existe une unique mesure de Radon μ invariante sur G telle que $\mu(G) = 1$. Le fait que la mesure μ est invariante signifie que, pour tout $A \subset G$, tout $g \in G$, $\mu(A) = \mu(\{gh; h \in A\}) = \mu(\{hg; h \in A\})$. Dans le cas des groupes abeliens localement compacts, cette mesure de Haar permet de développer une analyse harmonique sur le groupe, c'est à dire des notions de séries et transformées de Fourier. Notons que le groupe quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, noté T, est un exemple de groupe abelien localement compact. Dans ce cas, la mesure de Haar sur T peut être identifié avec la mesure de Lebesgue sur $[0, 2\pi)$ et l'analyse harmonique sur T est l'analyse de Fourier classique. Pour plus de détails, voir [Kat].

6) Mesure harmonique
Soit Ω un ouvert connexe du plan complexe $\mathbb{C}$ dont le bord $\partial\Omega$ n'est pas "trop gros" (c'est à dire de capacité positive). Pour $x \in \Omega$, la mesure harmonique ω_x est une mesure de Radon de masse totale 1 telle que pour toute fonction continue $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, la fonction harmonique sur Ω et coincidant avec g sur $\partial\Omega$ est $\phi : x \to \int \phi d\omega_x$ (c'est à dire ϕ est la solution du problème de Dirichlet sur Ω avec valeur au bord g). Cette mesure a une interprétation probabiliste en termes de mouvement brownien. Voir [Ra].

Terminons par quelques rappels sur la notion de mesure produit. Soient $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés. On note $X = X_1 \times X_2$ l'espace produit et $\mathcal{M}$ la tribu produit de $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$, c'est à dire la tribu engendrée par la collection des ensembles $A_1 \times A_2$ quand A_1 (respectivement A_2) décrit $\mathcal{M}_1$ (respectivement $\mathcal{M}_2$). Il existe une unique mesure μ sur X (appelée mesure produit) telle que $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ pour tout $A_1 \in \mathcal{M}_1$, tout $A_2 \in \mathcal{M}_2$.

1.2. **Intégrale de Lebesgue.** Nous n'allons pas définir l'intégrale de Lebesgue. Nous allons seulement nous contenter de donner quelques idées sur sa construction et essayer d'expliquer pourquoi elle est si différente de l'intégrale de Riemann. Pour cela, considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. L'intégrale de Riemann de f sur un intervalle $[a,b]$ est la limite (si elle existe) de quantités (appelés sommes de Darboux) de la forme $\sum_i y_i \mathcal{L}^1([x_{i+1}, x_i])$ où les $[x_i, x_{i+1}]$ sont des intervalles disjoints de $[a,b]$ dont l'union est $[a,b]$ tout entier et y_i est un point de la forme $f(t_i)$ où $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$. D'un autre côté, l'intégrale de Lebesgue est la limite (si elle existe) des sommes $\sum y_j m_j$ où les intervalles $[y_j, y_{j+1}]$ forment une subdivision de l'image $f([a,b])$ et m_j est la mesure de $\{x \in [a,b]; y_j \leq f(x) < y_{j+1}\}$. En d'autres termes, l'intégration de Riemann se fait en "coupant suivant les x", celle de Lebegsue en "coupant suivant les y". Comme le disait Lebesgue lui-même pour expliquer, lors d'une conférence à Copenhague, la différence (et la supériorité) de son intégrale sur celle de Riemann.
"Avec le procédé de Riemann, on sommait les indivisibles dans l'ordre où ils étaient fournis par la variation de x. On opérait donc comme le ferait un commerçant sans méthode qui compterait pièces et billets au hasard de l'ordre où ils lui tomberaient sous la main ; tandis que nous opérons comme le commerçant méthodique qui dit
j'ai $m(E_1)$ pièces de une couronne, valant $1.m(E_1)$
j'ai $m(E_2)$ pièces de deux couronnes, valant $2.m(E_2)$
j'ai $m(E_5)$ pièces de cinq couronnes, valant $5.m(E_5)$
etc.... donc j'ai en tout

$$S = 1.m(E_1) + 2.m(E_2) + 5.m(E_5) + ...''$$

Il est important de noter que Lebesgue utilise la notation $m(E_1)$ pour désigner la mesure de E_1.

On rappelle (sans les démonstrations que l'on peut trouver par exemple dans [Rud]) les principaux résultats de convergence.

Théorème 3 (Théorème de convergence monotone). *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telle*
(i) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ..... \leq +\infty$ pour μ-presque pour $x \in X$;
(ii) $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour μ-presque tout $x \in X$.
Alors, la fonction f est mesurable et $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Théorème 4 (Lemme de Fatou). *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \to [0,\infty]$ une fonction mesurable. Alors, $\int_X \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$.*

L'inégalité est en général stricte. Par exemple, considérer $f_n = \chi_E$ si n est impair et $f_n = 1 - \chi_E$ si n est pair (où χ_E est la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable E de X).

Théorème 5 (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré et soit (f_n) une suite de fonctions complexes mesurables sur X telles que pour μ-presque tout $x\in X$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)$. S'il existe une fonction $g: X\to[0,+\infty]$ avec $\int_X g d\mu<+\infty$ et telle que $|f_n(x)|\le g(x)$ pour tout $x\in X$ et tout $n\in\mathbb{N}$, alors $\int_X |f|d\mu<+\infty$ et $\displaystyle\int_X \lim_{n\to+\infty}|f-f_n|d\mu=0$. De même, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu=\int_X f d\mu$.*

On a déjà signalé qu'il n'y avait pas égalité dans le lemme de Fatou. Le résultat suivant donne une idée du "terme manquant" pour que l'inégalité dans Fatou devienne une égalité.

Théorème 6. *Fixons $p\in]0,+\infty[$. Soit $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré et soit (f_n) une suite de fonctions complexes mesurables sur X telles que pour μ-presque tout $x\in X$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)$. Supposons, de plus, qu'il existe $C>0$ telle que $\int_X |f_n|^p d\mu<C$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Alors,*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X \left||f_n(x)|^p-|f_n-f(x)|^p-|f(x)|^p\right| d\mu=0.$$

Démonstration. On commence par le lemme suivant.

Lemme 7. *Soit p avec $0<p<\infty$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C_\varepsilon>0$ telle que, pour tous a, $b\in\mathbb{C}$,*

$$\left||a+b|^p-|b|^p\right|\le\varepsilon|b|^p+C_\varepsilon|a|^p.$$

Démonstration. La fonction $t\to t^p$ est convexe si $p>1$. On en déduit que $|a+b|^p\le(|a|+|b|)^p\le(1-\lambda)^{1-p}|a|^p+\lambda^{1-p}|b|^p$ pour tout $\lambda\in]0,1[$. Le lemme (pour $p>1$) se déduit en considérant $\lambda=(1+\varepsilon)^{\frac{-1}{p-1}}$. Pour $p\in]0,1[$, le lemme découle de l'inégalité immédiate $|a+b|^p-|b|^p\le|a|^p$. □

Ecrivons maintenant $g_j=f_j-f$. Alors, (g_j) converge presque partout vers la fonction nulle. Posons

$$G_j^\varepsilon=\left(\left||f+g_j|^p-|g_j|^p-|f|^p\right|-\varepsilon|g_j|^p\right)_+$$

où $(h)_+$ désigne la partie positive de h. Alors, d'après le lemme,

$$\begin{aligned}\left||f+g_j|^p-|g_j|^p-|f|^p\right| &\le \left||f+g_j|^p-|g_j|^p\right|+|f|^p\\ &\le \varepsilon|g_j|^p+(1+C_\varepsilon)|f|^p.\end{aligned}$$

Donc, $G_j^\varepsilon\le(1+C_\varepsilon)|f|^p$ avec, d'après le lemme de Fatou, $\int|f|^p\le C$. De plus, G_j^ε converge presque partout vers la fonction nulle. Donc, d'après le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{j\to+\infty}\int G_j^\varepsilon=0$. Or,

$$\int\left||f+g_j|^p-|g_j|^p-|f|^p\right|\le\varepsilon\int|g_j|^p+\int G_j^\varepsilon.$$

Il nous reste donc à estimer la première intégrale du membre de gauche. Pour cela, notons que $\int|g_j|^p$ est uniformément borné, puisque

$$\int|g_j|^p=\int|f-f_j|^p\le2^p\int(|f|^p+|f_j|^p)\le2^{p+1}C.$$

Donc, il existe $\tilde{C} > 0$ telle que

$$\limsup_{j \to 0} \int ||f + g_j|^p - |g_j|^p - |f|^p| \leq \tilde{C}.\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on peut conclure aisément.

□

Donnons maintenant un énoncé du théorème de Fubini et une application "amusante", mais non dénuée d'intêret pratique (voir [LL]).

Théorème 8 (Théorème de Fubini)**.** *Soient $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit f une fonction sur $X_1 \times X_2$ mesurable (par rapport à $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$. On note $\phi(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)$ et $\psi(x_2) = \int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1)$. Si f est positive, alors ϕ et ψ sont mesurables (respectivement par rapport à $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$) et*

$$\int_{X_1} \phi(x_1) d\mu_1(x_1) = \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \times d\mu_2)(x_1, x_2) = \int_{X_2} \psi(x_2) d\mu_2(x_2).$$

Théorème 9 (Layer cake representation)**.** *Soit ν une mesure de Borel sur $[0, +\infty)$ telle que, si on pose $\phi(t) = \nu([0, t))$, $\phi(t)$ est fini pour tout $t > 0$. Soient μ une mesure de Borel (localement finie) et f une fonction mesurable positive sur X. Alors,*

$$\int_X \phi(f(x)) d\mu(x) = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X; f(x) > t\}) d\nu(t).$$

En particulier, si $d\nu(t) = pt^{p-1}dt$ pour un $p > 0$, on a

$$\int_X f(x)^p d\mu(x) = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(\{x \in X; f(x) > t\}) dt.$$

Si μ est la mesure de Dirac en $x \in \mathbb{R}^n$ et $p = 1$, on obtient

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \chi_{f>t}(x) dt.$$

On a noté ici dt l'intégration par rapport à la mesure de Lebegsue dans $\mathbb{R}^+$.

Démonstration. Tout d'abord,

$$\int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X; f(x) > t\}) d\nu(t) = \int_0^{+\infty} \int_X \chi_{\{f>t\}} d\mu(x) d\nu(t)$$

avec $\chi_{\{f>t\}}(x)$ est mesurable en x et t. D'où, en appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X; f(x) > t\}) d\nu(t) = \int_X \left(\int_0^{+\infty} \chi_{\{f>t\}} d\nu(t) \right) d\mu(x).$$

On conclut en notant que

$$\int_0^{+\infty} \chi_{\{f>t\}}(x) d\nu(t) = \int_0^{f(x)} d\nu(t) = \phi(f(x)).$$

□

On termine par un problème de minimisation. La démonstration est laissée au lecteur comme un exercice facile d'intégration.

Théorème 10 (Principe de la baignoire). *Soit* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable telle que* $\mu(\{x \in X; f(x) < t\})$ *est fini pour tout* $t \in \mathbb{R}$. *Soit* $G \in \mathbb{R}^{+*}$ *donné et considérons un ensemble de fonctions mesurables sur* X *défini par*

$$\mathcal{C} = \{g : X \to \mathbb{R}\ 0 \leq g(x) \leq 1 \textit{ pour tout } x \in X \textit{ et } \int_X g(x) d\mu(x) = G\}.$$

Alors, le problème de minimisation

$$I = \inf_{g \in \mathcal{G}} \int_X f(x) g(x) d\mu(x)$$

est résolu par $g(x) = \chi_{\{f<s\}}(x) + c\chi_{\{f=s\}}(x)$ *et* $I = \int_{\{f<s\}} f(x) d\mu(x) + cs\mu(\{x \in X; f(x) = s\})$ *où*

$$s = \sup\{t \in \mathbb{R}; \mu(\{x \in X; f(x) < t\}) \leq G\},$$

$$c\mu(\{x \in X; f(x) = s\}) = G - \mu(\{x \in X; f(x) < s\}).$$

De plus, la solution est unique si $G = \mu(\{x \in X; f(x) < s\})$ *ou si* $G = \mu(\{x \in X; f(x) \leq s\})$.

2. Définition et premières propriétés des espaces L^p

Dans toute cette partie, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on définit $\mathcal{L}^p(\mu)$ comme étant l'espace des fonctions mesurables (relativement à $\mathcal{M}$) de X dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) telles que $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$. On note $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ l'espace des fonctions f mesurables de X dans $\mathbb{K}$ pour lesquelles il existe un réel $M \geq 0$ telle que $|f(x)| \leq M$ pour μ-presque tout $x \in X$.
On définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{K}$ par $f\mathcal{R}g$ si et seulement si $\mu(\{x \in X; f(x) \neq g(x)\}) = 0$ (c'est à dire $f = g$ μ-presque partout). On définit alors l'espace vectoriel $L^p(\mu)$ comme l'espace vectoriel quotient de $\mathcal{L}^p(\mu)$ par $\mathcal{R}$ (c'est à dire on identifie dans $L^p(\mu)$ les fonctions égales μ-presque partout). Si $f \in L^p(\mu)$ (avec $p \in [1, +\infty[$), on pose

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

et si $f \in L^\infty(\mu)$, on définit

$$||f||_\infty = \min\{M \geq 0; |f| \leq M \ \mu\text{-presque partout}\}.$$

Ces définitions ne dépendent pas du représentant choisi dans la classe de f. De plus, pour $p \in [1, \infty]$, $||.||_p$ définit une norme sur $L^p(\mu)$ (mais est seulement une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(\mu)$). Le point-clé est l'inégalité triangulaire qui découle de l'inégalité (3) (appelé inégalité de Minkowski) du théorème suivant. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on définit l'exposant conjugué de p, noté p^* par $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^*} = 1$ si $p > 1$ et $p^* = \infty$ si $p = 1$.

Théorème 11 (Inégalités de Hölder et Minkowski). *Soit* $p \in [1, \infty[$ *et soient* f, g *deux fonctions mesurables (à valeurs dans* $[0, +\infty]$*) dans l'espace mesuré* $(X, \mathcal{M}, \mu)$. *Alors,*

(i) Si $f \in L^p(\mu)$ *et* $g \in L^{p^*}(\mu)$, *alors* $fg \in L^1(\mu)$ *et*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_{p^*} \tag{2}$$

(ii) Si f, $g \in L^p(\mu)$, *alors* $f + g \in L^p(\mu)$ *et*

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + |g||_p. \tag{3}$$

Ces inégalités sont des inégalités de convexité. Donnons un autre résultat de ce type.

Théorème 12 (Inégalité de Jensen). *Soit* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *telle que* $\mu(X) = 1$. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction dans* $L^1(\mu)$ *telle que* $a < f(x) < b$ *pour tout* $x \in X$. *Alors, si* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction convexe sur* $]a, b[$, *on a*

$$\phi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X (\phi \circ f) d\mu.$$

Une des propriétés fondamentales des espaces $L^p(\mu)$ est qu'ils sont complets.

Théorème 13. *Si* $1 \leq p \leq +\infty$, *l'espace* $L^p(\mu)$ *muni de* $||.||_p$ *est un espace de Banach.*

On va maintenant rappeler des théorèmes de densité, et les utiliser pour démontrer un résultat d'interpolation puis la séparabilité de $L^p(\mu)$ quand μ est une mesure de Radon sur un espace séparable localement compact.

On commence par rappeler qu'une fonction étagée $s : X \to \mathbb{K}$ est une fonction dont l'image est un sous-ensemble fini de $\mathbb{K}$. En d'autres termes, il existe α_1,..., α_n (valeurs prises par s) tels que $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ où $A_i = \{x \in X; s(x) = \alpha_i\}$. Notons que s est mesurable si et seulement si tous les A_i sont mesurables.

Proposition 14. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable positive. Alors, il existe des fonctions mesurables étagées* $s_n : X \to \mathbb{R}$ *de sorte que*

(i) $0 \leq s_1 \leq ... \leq f$;

(ii) Pour tout $x \in X$, $\lim_{n \to +\infty} s_n(x) = f(x)$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier $k = k(n, t)$ tel que $k.2^{-n} \leq t < (k+1).2^{-n}$ (Décompostion dyadique de $\mathbb{R}$). Posons

$$\phi_n(t) = \begin{cases} k(n,t)2^{-n} & \text{si } 0 \leq t < n \\ n & \text{si } t \geq n \end{cases} \tag{4}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que chaque ϕ_n est mesurable sur $[0, +\infty]$, et vérifie $t - 2^{-n} < \phi_n(t) \leq t$ si $0 \leq t \leq n$, $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 ... \leq t$ et $\lim_{n \to +\infty} \phi_n(t) = t$. On en déduit que les fonctions $s_n = \phi_n \circ f$ satisfont les conclusions du théorème.

□

Théorème 15. *Si $f \in L^1(\mu) \cap L^\infty(\mu)$, alors pour tout $p \in]1, \infty[$, $f \in L^p(\mu)$ et*

$$||f||_p \leq ||f||_1^{\frac{1}{p}} ||f||_\infty^{1-\frac{1}{p}}.$$

De plus, si $1 \leq p < \infty$, $L^1(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ est dense dans $L^p(\mu)$.

Démonstration. Supposons que $f \in L^1(\mu) \cap L^\infty(\mu)$. Alors, pour μ-presque tout $x \in X$, $|f(x)|^p \leq |f(x)| ||f||_\infty^{p-1}$. On en déduit aisément $||f||_p \leq ||f||_1^{\frac{1}{p}} ||f||_\infty^{1-\frac{1}{p}}$. Supposons maintenant que $1 \leq p < +\infty$ et considérons $f \in L^p(\mu)$. Comme $|f|^p$ est une fonction positive inégrable, on peut, d'après la proposition précédente, l'approximer presque partout par une suite croissante de fonctions étagées intégrables et positives (s_n). Posons $\alpha(x) = \dfrac{f(x)}{|f(x)|}$ si $f(x) \neq 0$ et $\alpha(x) = 0$ si $f(x) = 0$. Alors, la suite de fonctions $(\alpha(x) s_n^{\frac{1}{p}})$ est dans $L^1(\mu) \cap L^\infty(\mu)$, elle converge presque partout vers f, et elle est majorée en valeur absolue par $|f|$. D'où, d'après le théorème de convergence dominée, $(\alpha s_n^{\frac{1}{p}})$ converge vers f dans $L^p(\mu)$. Remarquons que cette preuve implique que les fonctions étagées intégrables sont denses dans $L^p(\mu)$ pour $p \in [1, \infty[$. Attention, ceci n'est pas vrai en général pour $p = \infty$. □

On suppose dans toute la fin de la section que X est un espace métrique séparable, localement compact. Commençons par une application importante de la proposition 14.

Théorème 16 (Théorème de Lusin)**.** *Soit μ une mesure de Radon sur X et soit f une fonction à valeurs complexes et mesurable sur X. On suppose qu'il existe un ensemble A tel que $\mu(A) < +\infty$ en dehors duquel f est nulle. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in C_c(X)$ telle que*

$$\mu(\{x \in X ; f(x) \neq g(x)) \leq \varepsilon.$$

De plus, on peut modifier la fonction g de sorte que $\sup_{x \in X} |g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Supposons d'abord que $0 \leq f \leq 1$ et que A soit compact. Le cas général en découlera. Soit (s_n) la suite de fonctions étagées construites dans la démonstration de la proposition 14. Posons $t_1 = s_1$ et pour tout tout $n \geq 2$, $t_n = s_n - s_{n-1}$. Alors, $2^n t_n = \chi_{T_n}$ où $T_n \subset A$ et $f = \sum_{n=1}^{+\infty} t_n$. L'idée maintenant est d'approcher χ_{T_n} par des fonctions continues à support compact. Comme X est séparable et localement compact, il existe un ouvert V tel que $A \subset V$ et $\overline{V}$ soit compact. Par régularité de μ, il existe des compacts K_n et des ouverts V_n tels que $K_n \subset T_n \subset V_n \subset V$ et $\mu(V_n \setminus K_n) \leq 2^{-n}\varepsilon$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $h_n \in C_c(X)$ telle que $0 \leq h_n \leq 1$, $h_n(x) = 1$ si $x \in K_n$ et $h_n(x) = 0$ si $x \notin V_n$. Ceci est le lemme d'Urysohn. Si on pose $g = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} h_n$, alors g est continue (Pensez à la convergence uniforme !) et est à support dans $\overline{V}$. De plus, comme $t_n = 2^{-n} h_n$ sauf sur $V_n \setminus K_n$, on a $f = g$ sauf sur $B_n = \cup_n (V_n \setminus K_n)$. Or, $\mu(B_n) \leq \varepsilon$. Ce qui termine la preuve dans le cas où A est compact et $0 \leq f \leq 1$ (ou même f bornée).

Pour éliminer l'hypothèse de compacité, on utilise le fait que pour tout ensemble

A avec $\mu(A) < +\infty$, il existe un compact K inclus dans A tel que $\mu(A \setminus K)$ est arbitrairement petit. Considérons maintenant une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable. Posons $C_n = \{x \in X; |f(x)| \geq n\}$. Alors, puisque $\cap_n C_n = \emptyset$, $\lim_{n\to+\infty} \mu(C_n) = 0$ d'aprés la propriété (M5) d'une mesure. D'où, comme f coincide avec la fonction bornée $(1 - \chi_{C_n})f$ sauf sur C_n, on conclue aisément.

Pour démontrer la seconde partie du théorème, posons $R = \sup\{|f(x)|; x \in X\}$ et définissons $\phi(z) = z$ si $|z| \leq R$ et $\phi(z) = \dfrac{Rz}{|z|}$ si $|z| < R$. Alors, la fonction ϕ est continue sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans le disque (fermé) de rayon R et la fonction $G = \phi \circ g$ convient. □

Remarque. Nous rappelons que le lemme d'Urysohn dit que dans un espace séparé localement compact X, si V est un ouvert de X et K un compact de X inclus dans V, alors il existe $h \in C_c(X)$ tel que $0 \leq h \leq 1$, $h = 1$ sur K et $h = 0$ en dehors de V (c'est à dire $\chi_K \leq f \leq \chi_V$).

Théorème 17. *Soit μ une mesure de Radon sur X, alors l'espace $C_c(\mu)$ est dense dans $L^p(\mu)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.*

Démonstration. Soit s une fonction étagée (que l'on peut supposer nulle en dehors de A avec $\mu(A) < +\infty$). Alors, d'après le théorème de Lusin, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g_\varepsilon \in C_c(X)$ telle que $g_\varepsilon(x) = s(x)$ sauf sur un ensemble de mesure inférieure à ε. On en déduit

$$||g_\varepsilon - s||_p \leq 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}||s||_\infty.$$

Comme les fonctions étagées sont denses dans $L^p(\mu)$ (voir la preuve du théorème 15), la démonstration est complète. □

On en déduit le

Corollaire 18. *Soit μ est une mesure de Radon sur X, alors $L^p(\mu)$ est séparable pour tout $1 \leq p < +\infty$.*

Démonstration. On commence par le lemme suivant.

Lemme 19. *Soit X un espace métrique séparable localement compact. Alors, il existe une suite de compacts (K_n) tels que $X = \cup_n K_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset Int(K_{n+1})$ (où $Int(K_{n+1})$ désigne l'intérieur de K_{n+1}).*

Une telle suite de compacts (K_n) s'appele une suite exhaustive de compacts de X.

Démonstration. On a déjà vu qu'un espace séparable localement compact est σ-compact, c'est à dire qu'il existe une famile dénombrable de compacts C_n tels que $X = \bigcup_n C_n$. On construit alors les K_n par récurrence. On pose $K_0 = C_0$ et pour tout $n \geq 1$, on choisit un compact K_n tel que $K_{n-1} \cup C_{n-1} \subset \mathrm{Int}K_n$. Montrons qu'un tel choix est possible. Puisque X est localement compact, pour tout $x \in K_{n-1} \cup L_{n-1}$, il existe un compact K_x tel que $x \in \mathrm{Int}(K_x)$. D'ou, on peut recouvrir $K_{n-1} \cup C_{n-1}$ par un nombre fini $(\mathrm{Int} K_{x_i})_{i=1,..p}$ de tels compacts. D'où, $K_{n-1} \cup C_{n-1} \subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{Int}(K_{x_i}) \subset \mathrm{Int}(\bigcup_{i=1}^{p} K_{x_i})$. Ce qui montre que le choix de K_n est possible. De plus,

$$X = \bigcup_i C_i \subset \bigcup_i (K_i \cup L_i) \subset \bigcup_i \mathrm{Int} K_{i+1} \subset \bigcup_n K_n.$$

Ce qui termine la preuve du lemme. □

Considérons maintenant une suite exhaustive de compacts (K_n) donnée par le lemme. Alors, $C_c(X) = \bigcup_n C_{K_n}(X)$ (où $C_{K_n}(X)$ est l'espace des fonctions continues dans X dont le support est contenu dans K_n). D'après le théorème 17, il suffit donc de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{K_n}(X)$ est séparable. Or, $C_{\mathbb{K}_n}(X)$ est séparable pour la norme uniforme N_∞ et, pour tout $f \in C_{K_n}(X)$, $||f||_p \leq N_\infty(f)\mu(K_n)^{\frac{1}{p}}$.

□

3. Dualité et convergence faible

Dans toute cette section, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré. On suppose que μ est σ-finie (c'est à dire que X est la réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie pour m).

On appelle fonctionnelle sur $L^p(\mu)$ toute application linéaire $T : L^p(\mu) \to \mathbb{C}$. On dira que T est continue si pour tout suite (f_i) convergente vers f dans $L^p(\mu)$, la suite complexe $(T(f_i))$ converge vers $T(f)$ dans $\mathbb{C}$. On dira que T est bornée s'il existe $C > 0$ tel que $|T(f)| \leq C||f||_p$ pour toute fonction $f \in L^p(\mu)$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que T est bornée si et seulement si T est continue. L'ensemble des fonctionnelles continues sur $L^p(\mu)$ s'appelle le dual de $L^p(\mu)$ et se note $L^p(\mu)^*$. Il est clair que $L^p(\mu)^*$ est un espace vectoriel normé quand on le munit de $||T|| = \sup\{|T(f)|; ||f||_p \leq 1\}$.

Soit $p \in [1, +\infty]$. On note p^* son conjugué (voir la section précédente). Il est clair que pour toute fonction $g \in L^{p^*}$, l'application $T_f : L^p(\mu) \to \mathbb{C}$ définie par $T_f(g) = \int_X fgd\mu$ est une fonctionnelle continue sur $L^p(\mu)$ dont la norme est bornée par $||g||_{p^*}$ (d'après l'inégalité de Hölder. En fait, ce sont les seules fonctionnelles continues sur $L^p(\mu)$ si $p \neq \infty$.

Théorème 20. *Soit $p \in [1, +\infty[$. Le dual de $L^p(\mu)$ est $L^{p^*}(\mu)$, au sens où toute fonctionnelle $T \in L^p(\mu)^*$ est de la forme $T(f) = \int_X g(x)f(x)d\mu(x)$ pour un unique $g \in L^{p^*}(\mu)$. De plus, $||T|| = ||g||_{p^*}$.*

Remarque : Le théorème précédent montre que, si $1 < p < +\infty$, les espaces L^p sont reflexifs. Ce n'est pas le cas si $p = 1$ ou $p = \infty$, voir [Bre].

Nous allons maintenant étudier une autre notion de convergence dans les espaces $L^p(\mu)$.

Soit $p \in [1, +\infty]$ et soit (f_i) une suite de fonctions dans $L^p(\mu)$. On dit que (f_j) converge faiblement vers f si $\lim_{i\to+\infty} T(f_i) = T(f)$ pour toute fonctionnelle continue

$T \in L^p[\mu)^*$. Il est clair, d'aprés les définitions, que si (f_j) converge vers f dans $L^p(\mu)$, c'est à dire $\lim_{i\to+\infty} ||f_j - f||_p = 0$ (on dira dans la suite que (f_j) converge fortement dans $L^p(\mu)$), alors (f_j) converge faiblement vers f dans $L^p(\mu)$. La réciproque est fausse. Pour voir cela, utiliser le théorème 20 et considérer par exemple dans $\mathbb{R}$ (muni de sa mesure de Lebesgue) la suite de fonctions (f_k) où $f_k(x) = \sin(kx)$ si $0 \le x \le 1$ et $f(x) = 0$ sinon.

Théorème 21. *Soit $f \in L^p(\mu)$ telle que $T(f) = 0$ pour toute fonctionnelle $T \in L^p(\mu)^*$. Alors, f est nulle (preque partout) sur X.*

Démonstration. Supposons pour commencer que $p \in]1, +\infty[$. Posons $g(x) = |f(x)|^{p-2}\overline{f}(x)$ si $f(x) \neq 0$ et $g(x) = 0$ sinon. Puisque $f \in L^p(\mu)$, des calculs élémentaires montrent que $g \in L^{p^*}$ et que $\int_X gf d\mu = ||f||_p^p$. Comme $T_g : h \to \int_X ghd\mu$ est une fonctionnelle sur $L^p(\mu)$, notre hypothèse implique que T_g est nulle et donc que $T_g(f) = ||f||_p^p = 0$. Donc, $f = 0$ p.p.
Supposons maintenant que $p = 1$. Posons $g(x) = |f(x)|^{-1}\overline{f}(x)$ si $f(x) \neq 0$ et $g(x) = 0$ sinon. Alors, $g \in L^\infty(\mu)$ et on peut appliquer le même argument que precedemment.
Supposons enfin que $p = \infty$. Posons $A = \{x \in X; |f(x)| > 0\}$. Si f n'est pas nulle p.p., alors $\mu(A) > 0$. Considérons un ensemble mesurable $B \subset A$ tel que $0 \le \mu(B) < +\infty$. Nous utilisons ici le fait que μ est sygma-finie. Posons $g(x) = \dfrac{f(x)}{|f(x)|}$ si $x \in B$ et $g(x) = 0$ sinon. Alors, $g \in L^1(\mu)$. On en déduit que $f = 0$ sur B. On conclue aisément en considérant un recouvrement de A par des ensembles de mesure finie. □

Théorème 22. *Soit $p \in [1, +\infty]$ et soit (f_j) une suite de fonctions dans $L^p(\mu)$ qui converge faiblement vers f dans $L^p(\mu)$. Alors, $\liminf_{i\to+\infty} ||f_i||_p \ge ||f||_p$. De plus, si $1 < p < +\infty$ et si $\liminf_{i\to+\infty} ||f_i||_p = ||f||_p$, alors (f_j) converge fortement dans $L^p(\mu)$.*

Toute suite faiblement convergente dans $L^p(\mu)$ est bornée en norme L^p. C'est ce que montre le résultat suivant.

Théorème 23. *Soit (f_i) une suite de fonctions dans $L^p(\mu)$ telle que pour toute fonctionnelle T dans $L^p(\mu)^*$, la suite $(T(f_i))$ est bornée (dans $\mathbb{C}$). Alots, il existe $C > 0$ tel que $||f_i||_p \le C$.*

Nous allons maintenant donner un procédé de construction de suites fortement convergentes à partir de suites faiblement convergentes.

Théorème 24 (Théorème de Mazur)**.** *Soit $p \in]1, +\infty[$ et soit (f_i) une suite de $L^p(\mu)$ qui converge faiblement vers f dans $L^p(\mu)$. Alors, il existe une suite de fonctions (g_i) dans $L^p(\mu)$ telle que*

(i) La suite (g_i) converge fortement vers f dans $L^p(\mu)$.

(ii) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, g_i est dans l'enveloppe convexe des f_i, c'est à dire il existe des c_i^j, $j = 1, .., N_i$, tels que $g_i = \sum_{j=1}^{N_i} c_i^j f_j$ et $\sum_{j=1}^{N_i} c_i^j = 1$.

On termine par une version du théorème de Banach-Alaoglu dans le cas des espaces $L^p(\Omega)$ où Ω est un ensemble mesurable dans $\mathbb{R}^n$. On note dans ce cas $L^p(\Omega)$ l'espace $L^p(\mu)$ où μ est la restriction de la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^n$ à Ω.

Théorème 25. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable et soit $1 < p < +\infty$. Supposons que (f_i) une suite bornée dans $L^p(\Omega)$. Alors, il existe une sous-suite $(f_{\sigma(i)})$ de (f_i) qui converge faiblement dans $L^p(\Omega)$.*

Démonstration. D'après le théorème 20, il suffit de trouver une sous-suite (f_{n_j}) telle que $\displaystyle\int f_{n_j}(x)g(x)d\mu(x)$ est une suite convergente de nombres réels pour tout $g \in L^{p^*}(\Omega)$. Comme $L^{p^*}(\Omega)$ est séparable, il suffit de montrer cette convergence pour une famille (dénombrable) (ϕ_k) dense dans $L^{p^*}(\Omega)$. Pour cela, on va utiliser le procédé diagonale.

Posons $u_j^1 = \displaystyle\int f_j\phi_1$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Cette suite est bornée d'après l'inégalité de Hölder et le fait que la suite $||f_j||_p$ est bornée. D'où, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite (f_j^1) de (f_j) telle que la sous-suite de (u_j^1) associée converge vers un certain u_1.
Recommençons le même argument avec la suite $u_j^2 = \displaystyle\int f_j^1\phi_2$. On construit ainsi par récurrence une famille de sous-suites (f_j^k) de (f_j) telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_j^k = \displaystyle\int f_{k+1}^1\phi_k$ converge vers $u_k \in \mathbb{R}$.
Alors, le procédé diagonale de Cantor nous dit que la suite (F_k) définie, pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $F_k = f_k^k$ vérifie $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int F_k\phi_j = u_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Nous laissons aux lecteurs le soin de vérifier que la suite (F_k) convient. $\square$

4. Convolution

Dans toute cette section, nous considérons comme espace mesuré l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa tribu borelienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et de sa mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^n$.

Nous rappelons la définiton et les principales propriétés de la convolution (sans preuve).
Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ avec $p \in [1, +\infty]$ (et p^* est le conjugué de p). On peut alors définir le produit de convolution de f et g (que l'on appelle aussi la fonction convolée de f avec g) par $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)d\mathcal{L}^n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Remarquons que $f * g = g * f$. De plus, la fonction $f * g$ est uniformément continue, bornée sur $\mathbb{R}^n$, et $||f * g||_\infty \leq ||f||_p||g||_{p^*}$. En outre, si $1 < p < +\infty$, $\lim_{|x|\to+\infty} f * g(x) = 0$ (et ce résultat subsiste si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et g est à support compact).

Théorème 26 (Inégalites de Young). *Soient p, $q \in [1, +\infty]$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \geq 1$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g$ existe presque partout et est dans $L^r(\mathbb{R}^n)$ où r satisfait $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$. De plus, $||f * g||_r \leq ||f||_p||g||_q$.*

On déduit (assez facilement) du théorème que $L^1(\mathbb{R}^n)$ muni des lois $+$ et $*$ est un anneau commutatif. De plus, $L^1(\mathbb{R}^n)$ est un espace Banach et pour toutes fonctions f, g dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, $||fg||_1 \leq ||f||_1||g||_1$. On dit que $L^1(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre de Banach commutative. Cependant, $L^1(\mathbb{R}^n)$ n'est pas un anneau unitaire. Il admet quand même des "unités approchées".

On appelle approximation de l'unité toute suite (ϕ_k) de $L^1(\mathbb{R}^n)$ qui satisfait :
(i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\phi_k \geq 0$ et $\int \phi_k(x)d\mathcal{L}^n(x) = 1$;
(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{k\to+\infty} \int_{\{|x|\geq\varepsilon\}} \phi_n(x)d\mathcal{L}^n(x) = 0$.
Pour construire une approximation de l'unité, il suffit de considérer une fonction positive ϕ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ avec $\int \phi(x)d\mathcal{L}^1(x) = 1$ et de poser pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\phi_k(x) = k^n\phi(kx)$. On va maintenant justifier cette appellation.

Théorème 27. *Soit $p \in [1, +\infty[$ et soit (ϕ_k) une approximation de l'unité. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f * \phi_k \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $||f * \phi_k||_p \leq ||f||_p$. De plus, $f * \phi_k$ converge (fortement) vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. Le fait que $f * \phi_k \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et que $||f * \phi_k||_p \leq ||f||_p$ découle de l'inégalité de Young. De plus, puisque $\displaystyle\int \phi_n = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|f(x) - (f * \phi_k)(x)| \leq \int |f(x) - f(x-y)|\phi_k(y)d\mathcal{L}^n(y).$$

D'où, en appliquant au membre de droite l'inégalité de Hölder (par rapport à la mesure $\phi_k d\mathcal{L}^n$) et le fait que $\displaystyle\int \phi_k = 1$, il vient

$$|f(x) - (f * \phi_k)(x)| \leq \left(\int |f(x) - f(x-y)|^p\phi_k(y)d\mathcal{L}^n(y)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En notant $\tau_y f$ la fonction définie par $\tau_y f(x) = f(x-y)$, on en déduit

$$||f - f * \phi_k||_p^p \leq \int ||f - \tau_y f||_p^p\phi_k(y)d\mathcal{L}^n(y).$$

Or, pour tout $\varepsilon > 0$, en décomposant $\mathbb{R}^n$ comme la réunion disjointe de $\{y \in \mathbb{R}^n; |y| \leq \varepsilon\}$ et $\{y \in \mathbb{R}^n; |y| > \varepsilon\}$, il vient

$$\int ||f - \tau_y f||_p^p\phi_k(y)d\mathcal{L}^n(y) \leq \sup_{\{|y|\leq\varepsilon\}} ||f - \tau_y f||_p^p + (2||f||_p)^p \int |y| > \varepsilon\phi_n(y)d\mathcal{L}^n(y).$$

Il en résulte

$$\limsup_{k\to+\infty} ||f - f * \phi_k||_p \leq \sup_{|y|\leq\varepsilon} ||f - \tau_y f||_p.$$

On conclut aisément en utilisant le résultat classique en théorie de la mesure qui dit que $(\tau_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est un groupe commutatif d'isométrie de $L^p(\mathbb{R}^n)$. □

On en déduit le critère suivant de relative compacité dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 28. *Soient $p \in [1, +\infty[$ et H une partie de $L^p(\mathbb{R}^n)$. Pour que H soit relativement compact dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, il faut et il suffit que les propriétés suivantes soient vérifiées*

(i) H est borné dans $L^p(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $\lim_{R\to+\infty} \int_{\{|x|>R\}} |f(x)|^p d\mathcal{L}^n(x) = 0$ uniformément par rapport à $f \in H$;

(iii) $x \to f(x-a)$ converge, quand $a \to 0$, vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ uniformément par rapport à $f \in H$.

Références

[Bre] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod.

[Fa] K. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge Tracts in Mathematics Volume 85, Cambridge University Press (1985).

[HL] F. Hirsch, G. Lacombe, *Eléments d'analyse fonctionnelle*, Dunod (1999).

[Kat] Y. Katznelson, *An introduction to harmons analysis*, Dover (1976).

[J] J. Jost, *Postmodern analysis*, Universitext, Springer.

[LL] E. H. Lieb, M. Loss, *Analysis*, Graduate studies in mathematics Volume 14, American Mathematical Society.

[Mat] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge studies in advanced mathematics Volume 44, Cambridge University Press.

[Ra] T. Ransford, *Potential theory in the complex plane*, London Mathematical Society Student texts Volume 28, Cambridge University Press (1995).

[Rud] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod.