Séance du 20/01/10 avec M. LAFFONT

A. Polynômes, nombres de BERNOULLI.

g désigne l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $g(x, t) = \dfrac{xe^{xt}}{e^x-1}$ si $x \neq 0$ et $g(0, t) = 1$.

1. Démontrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial^n}{\partial x^n} g(x, t) = x\dfrac{\partial^n}{\partial x^n} g(x, t) + n\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} g(x, t)$

2. Soit (B_n) la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $B_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $B_n(t) = \dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(0, t)$;

a. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $B_n' = n B_{n-1}$; En déduire que B_n est une fonction polynôme de degré n .

b. calculer $\int_0^1 g(x, t)\, dt$; en déduire que $\int_0^1 B_n(t)dt = 0$.

3. a. Soit (C_n) la suite de fonctions, définie par $C_n(t) = (-1)^n B_n(1-t)$, démonter que pour tout n, $C_n = B_n$.

b. Soit $b_n = B_n(0)$, démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, $b_n = B_n(1)$ et que pour tout $p \geq 1$, $b_{2p+1} = 0$.

4. a. Démontrer que pour tout réel t, la fonction $x \to g(x,t)$ est développable en série entière au voisinage de 0 .

b. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $B_n(t) = t^n - \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k(t)$.

5. a. Déterminer B_1 et B_2 .

b. Suivant les valeurs de n, étudier les variations de B_n sur [0 ; 1] .

Jusqu'à la fin du sujet, f désigne une application d'un intervalle [a ; b] de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de classe C^∞

B. Formule d' EULER MAC-LAURIN.

1. Soit $h = b - a$

a. Démontrer que pour tout $n \geq 1$:

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{h^k}{k!}\left(B_k(1)f^{(k-1)}(b) - B_k(0)f^{(k-1)}(a)\right) + (-1)^n\frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 B_n(x)f^{(n)}(a+hx)dx .$$

b. En déduire que pour tout $p \geq 1$:

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{h}{2}(f(a)+f(b)) - \sum_{k=1}^{p} \frac{h^{2k}}{(2k)!}b_{2k}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right) + \frac{h^{2p+1}}{(2p)!}\int_0^1 B_{2p}(x)f^{(2p)}(a+hx)dx .$$

2. a. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 B_1(x)f'(a+hx)dx = -\frac{h}{2}\int_0^1 (B_2(x) - b_2)f''(a+xh)dx$;

b. En déduire que : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt - \frac{h}{2}(f(a)+f(b))\right| \leq \frac{h^3M_2}{12}$ où $M_2 = \displaystyle\sup_{x\in[a;b]} |f''(x)|$.

3. a. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 B_{2p}(x)f^{(2p)}(a+hx)dx = \frac{h^2}{(2p+1)(2p+2)}\int_0^1 \left(B_{2p+2}(x) - b_{2p+2}\right)f^{(2p+2)}(a+hx)dx$.

b. Soit $M_{2p+2} = \displaystyle\sup_{x\in[a;b]} \left|f^{(2p+2)}(x)\right|$, montrer que pour tout $p \geq 1$:

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \frac{h}{2}(f(a)+f(b)) + \sum_{k=1}^{p} \frac{h^{2k}}{(2k)!}b_{2k}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right)\right| \leq \frac{h^{2p+3}M_{2p+2}\left|b_{2p+2}\right|}{(2p+2)!} .$$

C. Application : Méthodes des trapèzes, de Simpson, développements asymptotiques.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $h = \dfrac{b-a}{n}$ et pour k entier compris entre 0 et n, soit $a_k = a + kh$.

On note $T_n(f) = \dfrac{b-a}{2n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(f(a_{k+1}) + f(a_k)\right)$ et $S_n(f) = \dfrac{b-a}{6n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(f(a_k) + 4f\left(\dfrac{a_k+a_{k+1}}{2}\right) + f(a_{k+1})\right)$.

1. Démontrer que pour tout $p \geq 1$: $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = T_n(f) - \sum_{k=1}^{p} \frac{(b-a)^{2k} b_{2k}}{n^{2k}(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right) + o\left(\frac{1}{n^{2p+1}}\right)$.

2. Déterminer un majorant de $\left| \displaystyle\int_a^b f(t)dt - T_n(f) \right|$.

3. Vérifier que $T_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt + \frac{(b-a)^2[f'(b)-f'(a)]}{12n^2} - \frac{(b-a)^4[f'''(b)-f'''(a)]}{720n^4} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$.

4. Montrer que $3\,S_n(f) = 4\,T_{2n}(f) - T_n(f)$.

5. Déterminer le développement asymptotique de $S_n(f)$ à la précision de $\dfrac{1}{n^5}$.

D. Méthode de Simpson : majoration de l'erreur (autre approche).

Soit Φ l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$, définie par : $\Phi(p) = \left(p(a) ; p\left(\dfrac{a+b}{2}\right) ; p'\left(\dfrac{a+b}{2}\right) ; p(b)\right)$.

1. Démontrer que Φ est une bijection ; en déduire l'existence d'une fonction polynôme p de degré inférieur ou égal à 3 telle que : $p(a) = f(a)$, $p\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, $p'\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, $p(b) = f(b)$.

2. Pour t appartenant à]a ;b[et différent de $\dfrac{a+b}{2}$, soit g_t la fonction définie sur [a ;b] par :

$$g_t(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(t) - p(t)}{(t-a)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2(t-b)}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b).$$

Démontrer qu'il existe $c \in [a ;b]$ tel que $g_t^{(4)}(c) = 0$.

3. En déduire que : pour tout $t \in [a ;b]$, $|f(t)-p(t)| \leq \dfrac{M_4}{4!}(t-a)\left(t-\dfrac{a+b}{2}\right)^2(b-t)$ où $M_4 = \displaystyle\sup_{t\in[a;b]}\left|f^{(4)}(t)\right|$

4. Démontrer que : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)\right| \leq \frac{M_4(b-a)^5}{2880}$

5. Déterminer un majorant de $\left| \displaystyle\int_a^b f(t)dt - S_n(f) \right|$.