Graphes eulériens

Les graphes sont des représentations abstraites de réseaux reliant des objets. Ils sont constitués de *sommets* représentant les objets, qui sont connectés entre eux par des *arêtes*. Une arête part d'un sommet, pour le relier à un unique autre sommet.

Les graphes étant des représentations abstraites, la forme des arêtes, ou la position des sommets sur la feuille n'importent pas. Pour que deux graphes soient identiques, il suffit qu'il y ait les mêmes sommets. Et que si un sommet qu'on appelle A est relié au sommet B dans un des graphes, alors il faut que ce soit également le cas dans l'autre graphe.

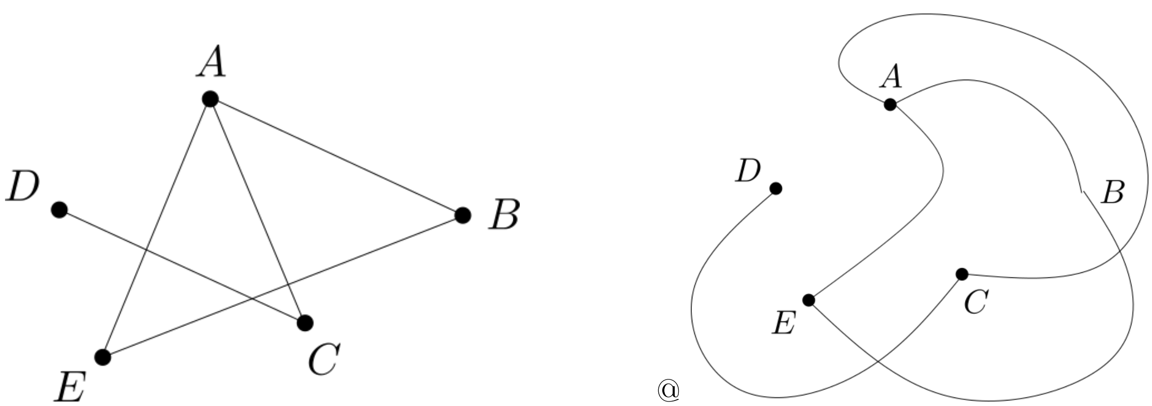

FIGURE 1: Deux exemples de graphes identiques : la forme des arêtes n'importe pas, seul importe que les mêmes sommets soient reliés entre eux dans les deux graphes.

Les graphes sont des objets mathématiques très utilisés. Ils peuvent par exemple servir à représenter des réseaux routiers. Les sommets représentent les villes, les arêtes représentent les routes. S'il existe une route directe entre la ville i et la ville j, alors il y a une arête entre les deux sommets des villes. Ils peuvent aussi servir à représenter des relations entre des personnes par exemple. Ainsi, Facebook utilise des graphes, où chaque personne est un sommet, et si deux personnes sont amies sur Facebook, alors il existe une arête reliant ces deux personnes. Il existe de nombreux autres exemples d'utilisation pratique des graphes...

On définit les **graphes eulériens** comme des graphes tels qu'on peut parcourir toutes les arêtes du graphe une et une seule fois, sachant que si on parcourt l'arête

i, reliant les sommets X et Y, et qu'on la parcourt en allant de X vers Y, alors, la prochaine arête parcourue devra nécessairement partir de Y pour aller vers un autre sommet. Autrement dit, si on dessine le graphe sur une feuille de papier, on doit pouvoir poser son crayon sur un premier sommet, suivre toutes les arêtes du graphe une seule fois avec le crayon et arriver à un sommet (l'initial ou un autre) sans jamais avoir levé le crayon ou sans être passé deux fois par une arête.

Par exemple, le graphe de la Figure 1 est eulérien. En effet, si on pose le crayon sur le sommet D, puis que suivant les arêtes, on parcourt les graphes en passant respectivement par les sommets $D \to C \to A \to E \to B \to A$. On est alors passé une et une seule fois par toutes les arêtes du graphe.

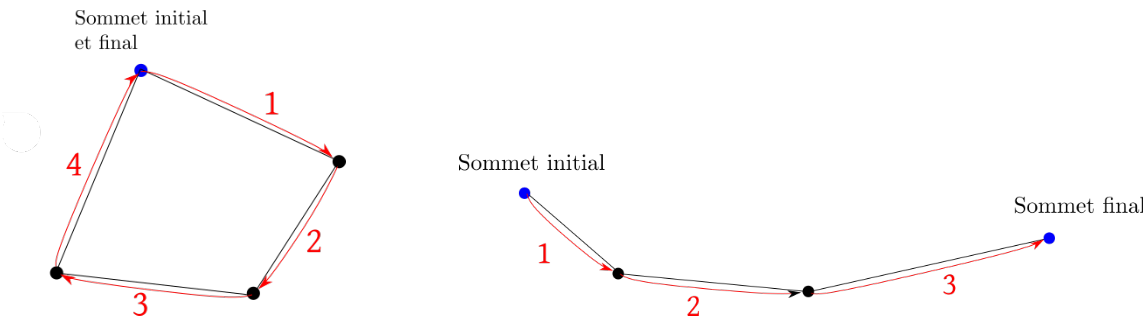

FIGURE 2: Deux exemples de graphes eulériens. Les graphes sont en noirs. On dessine en bleu le(s) sommet(s) initial et final, en rouge l'ordre dans lequel on parcourt les arêtes. On passe une et une unique fois par toutes les arêtes

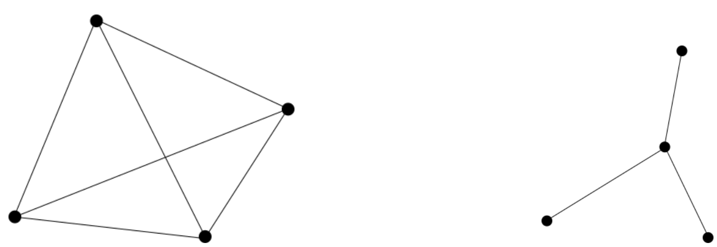

FIGURE 3: Deux exemples de graphe non eulériens. Quel que soit le sommet par lequel on commence, l'ordre de parcours des arêtes, il manque toujours au moins une arête par laquelle on ne peut pas passer, sans lever le crayon. Attention ! Plier la feuille de papier, ou autres tricheries sont évidemment interdites ! On donne ici une définition mathématique, on ne veut pas être le plus malin ;)

1. Essayez de tracer le graphe suivant (Figure 4) d'une traite, sans lever le crayon, ou passer deux fois par une arête. Est-ce que ce graphe est eulérien ?

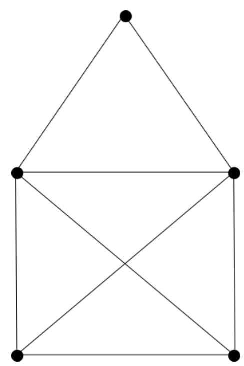

FIGURE 4: On peut noter que les arêtes se croisent au milieu du rectangle, mais qu'il n'y a pas de sommet à cet emplacement.

2. En étudiant plusieurs graphes, et en étudiant les arêtes ou les sommets par lesquels vous pouvez ou non commencer, déduisez les conditions nécessaires pour qu'un graphe soit eulérien.