

Automates

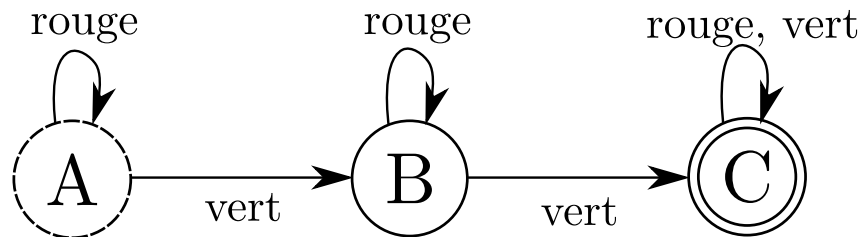
1 Présentation

Dans cette activité, on s'intéresse à la construction d'automates qui reconnaissent si une pile de gobelets vérifie une règle prédéfinie. Par exemple, est-ce que la pile de gobelets contient deux gobelets verts à la suite ? Est-ce que la pile de gobelets finit par un gobelet rouge ?

Un automate se présente sous la forme de cercles (appelés *états*) reliés par des traits (appelés *transitions*) et fonctionne de la manière suivante :

- On place la pile de gobelets sur le cercle en pointillés, appelé *état initial*.
- On déplace la pile de gobelets sur l'état indiqué par la flèche correspondant à la couleur du gobelet en haut de la pile, et l'on retire ce gobelet.
- On continue jusqu'à ce qu'un des événements suivants se produise :
 - Aucune flèche ne correspond à la couleur du gobelet du haut, et la pile est rejetée par l'automate.
 - La pile est vide et je me trouve sur l'état final, représenté par un double cercle. La pile est alors acceptée par l'automate.
 - La pile est vide et je me trouve sur un autre état que l'état final. La pile est alors rejetée par l'automate.

Voici un exemple d'automate pour des gobelets rouges et verts qui accepte uniquement les piles contenant au moins deux gobelets verts :



2 Prise en main

Déterminez la règle reconnue par chacun des automates suivants pour des gobelets verts et rouges :

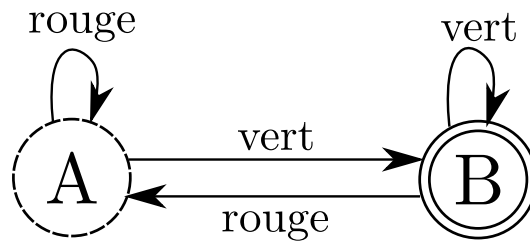


FIGURE 1: Automate #1

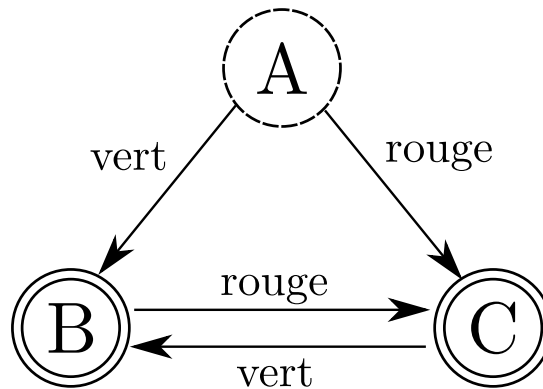


FIGURE 2: Automate #2

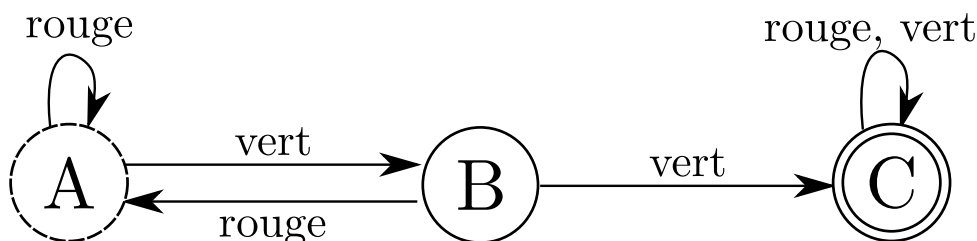


FIGURE 3: Automate #3

3 Construction d'automates

3.1 Avec des gobelets verts et rouges

1. Construire un automate qui accepte uniquement les piles finissant par deux gobelets rouges.
2. Construire un automate qui accepte uniquement les piles ne contenant que des gobelets verts puis que des gobelets rouges.
3. Construire un automate qui accepte uniquement les piles commençant par un gobelet vert et finissant par un gobelet rouge.
4. Construire un automate qui accepte uniquement les piles contenant au moins un gobelet de chaque couleur.
5. Construire un automate qui accepte uniquement les piles contenant au moins deux gobelets verts consécutifs, ou deux gobelets rouges consécutifs.
6. Construire un automate qui accepte uniquement les piles dont chaque série de gobelets verts est tout le temps suivie d'au moins un gobelet rouge.
7. Construire un automate qui accepte uniquement les piles contenant un nombre pair de gobelets rouges et un nombre pair de gobelets verts.
8. Construire un automate qui accepte uniquement les piles contenant un nombre pair de gobelets rouges, un nombre pair de gobelets verts et se terminant par un gobelet vert suivi d'un rouge.

3.2 Avec des gobelets verts, rouges et bleus

1. Construire un automate qui accepte uniquement les piles qui ne contiennent jamais deux gobelets consécutifs de la même couleur.
2. Construire un automate qui accepte uniquement les piles qui ne contiennent que des gobelets bleus, puis que des gobelets verts, puis que des gobelets rouges.

3.3 Pour aller plus loin

On appelle automate fini tout automate qui contient un nombre fini d'états.

1. Peut-on construire un automate fini qui accepte les piles contenant autant de gobelets rouges que de verts ?
2. Peut-on construire un automate infini qui accepte les piles contenant autant de gobelets rouges que de verts ?
3. Pouvez-vous imaginer des règles qu'aucun automate fini ne peut vérifier ?