Ateliers Sénémath

Version élève

Émilie Buessler, Émilie Devijver,
David Lucas, et Rémi Molinier

Octobre 2019

Table des matières

Ce document regroupe les activités présentées pendant le stage de formation des « animatheurs » du Sénégal. Ce stage se déroule du 24 au 29 octobre 2019, dans le cadre de l'appel à projets « Science Ensemble » de l'ambassade de France à Dakar qui est ici remerciée, et de la convention entre Animath et Campus-France pour le développement des activités périscolaires de mathématiques en Afrique. Il est organisé par le département de mathématiques de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar avec l'appui du Réseau des Clubs Scientifiques du Sénégal et de Animath.

Animath est représenté par trois chercheurs mathématiciens des universités de Grenoble-Alpes et de Caen, Emilie Devijver, David Lucas et Ndeye-Coumba Sarr.

Nous remercions toutes les entités impliquées sans qui la réalisation de ce projet n'aurait pu voir le jour. Nous remercions également les enseignants et les chercheurs qui participent à la formation, ainsi que les élèves qui travailleront sur ces activités. Nous remercions enfin Laurène Lucas pour la traduction des problèmes de Martin Gardner utilisés dans ce document (**??**, **??**, **??**).

« Chaque pas mène vers un résultat escompté ;
l'espoir se mesure au degré de combativité. »
Fatou Diome

Chapitre 1

MU

Dans cette activité, on se donne un ensemble de trois symboles {`M`, `I`, `U`} pouvant être arbitrairement composés pour former des mots. Par exemple, `MMM`, `MIU` ou encore `UUIM` sont des mots valides.

On se donne désormais un ensemble de quatre règles :

$$x\mathtt{I} \to x\mathtt{IU} \tag{1.1}$$

$$\mathtt{M}x \to \mathtt{M}xx \tag{1.2}$$

$$x\mathtt{III}y \to x\mathtt{U}y \tag{1.3}$$

$$x\mathtt{UU}y \to xy \tag{1.4}$$

x et y représentent une suite quelconque de symboles. Par exemple, la règle (1.1) permet de transformer `MMMI` en `MMMIU` et la règle (1.2) `MIU` en `MIUIU`.

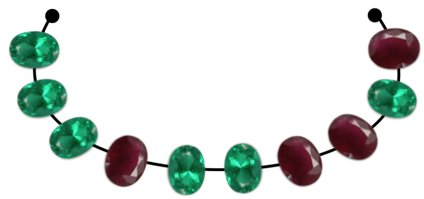
On se pose désormais deux questions : est-il possible de transformer le mot `MI` en `MU` en utilisant uniquement les règles ci-dessus ? Quels sont les critères permettant de dire si une chaîne donnée peut être obtenue à partir de `MU` en utilisant uniquement les règles ci-dessus ?

Chapitre 2

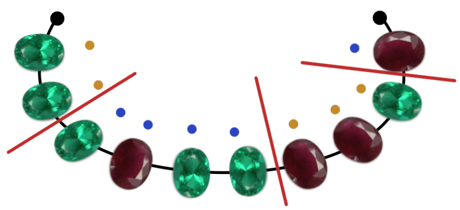
Le découpage de collier

2.1 Un premier exemple

Deux voleurs ont récupéré un magnifique collier composé de plusieurs perles : soit des émeraudes, soit des rubis.



L'un des voleurs propose de découper le collier selon les lignes rouges suivantes.



L'un prend les parties de collier identifiées par les points oranges, l'autre par les points bleus. Les deux voleurs sont heureux : chacun a exactement le même nombre d'émeraudes et le même nombre de rubis.

— Les coups de cisaille sur le collier métallique font beaucoup de bruit et risque d'attirer l'attention. Pouvez-vous proposer aux voleurs une découpe tout aussi équitable qui n'utilise que **2 coups de cisaille** ?
— Pourquoi n'existe-t-il pas de solution en **1 coup de cisaille** ?

2.2 En général

Tout ce que vous savez maintenant, c'est que le collier a un nombre pair d'émeraudes et un nombre pair de rubis, répartis aléatoirement.

- Quel est le nombre de coups de cisaille nécessaires dans le pire cas ?
- Proposer une méthode qui permet d'obtenir le nombre de coups de cisaille minimum dans tous les cas.

2.3 Pour aller plus loin...

- Que se passe-t-il s'il y a p voleurs ?
- Et s'il y a trois types de perles ? m types ?

Chapitre 3

Le crêpier psychorigide

3.1 Exemple

A la fin de sa journée, un crêpier dispose d'une pile de 5 crêpes désordonnée. Le crêpier étant un peu psychorigide, il décide de trier sa pile de crêpes, de la plus grande (en bas) à la plus petite (en haut).

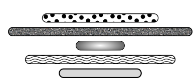


FIGURE 3.1 – La pile initiale

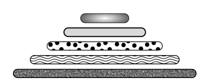


FIGURE 3.2 – La pile finale espérée

Cependant, sa cuisine est trop petite et il ne peut pas dépiler les crêpes. La seule action qu'il peut faire consiste à glisser sa spatule entre deux crêpes et retourner le haut de la pile.

Comment doit-il procéder pour trier toute la pile ?

3.2 En général

La même situation se passe tous les jours.
Proposer une méthode générale que le crêpier peut utiliser pour un tas de n crêpes.
Expliciter chaque étape. Combien d'étapes faut-il pour trier la pile de n crêpes ? Est-ce optimal ?

3.3 Cas de crêpes brulées

On imagine maintenant que chaque crêpe à une face brulée. Le crêpier veut alors trier ses crêpes en ayant la face brulée sur le dessous. Proposer une méthode générale pour l'aider !

Chapitre 4

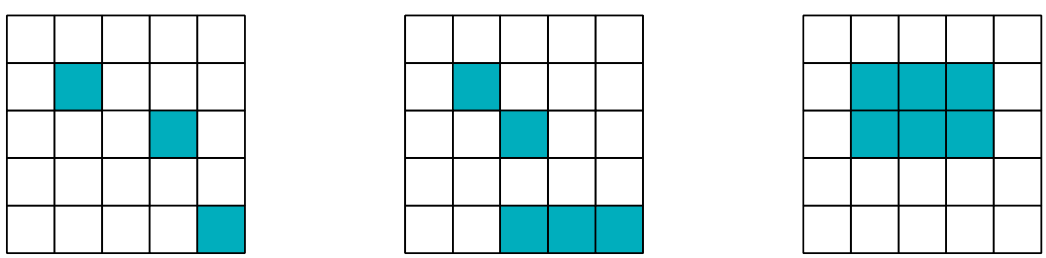
Jeu de la vie

4.1 Présentation

Dans cette activité, nous allons découvrir des particularités d'un système appelé le jeu de la vie. Ce jeu se joue sur un quadrillage et fonctionne de la manière suivante : chaque case (*cellule*) du quadrillage est soit vide (*morte*), soit pleine (*vivante*). À chaque tour, on fait évoluer toutes les cases en même temps comme suit : on regarde les voisins de chaque case (diagonales incluses, une case peut donc avoir jusqu'à 8 voisins) et

— si la case a 0 ou 1 voisins vivant, elle meurt (ou reste morte) ;
— si la case a 2 voisins vivants, elle conserve son état actuel ;
— si la case a exactement 3 voisins vivants, elle devient/reste vivante ; et
— si la case a 4 voisins vivants ou plus, elle meurt (ou reste morte).

Afin de se familiariser avec le jeu, commençons par faire jouer un tour aux grilles suivantes :



(a) Exemple 1 (b) Exemple 2 (c) Exemple 3

Figure 4.1 – Grilles exemple

puis deux tours à la grille suivante :

4.2 Recherche de formes particulières

On s'intéresse désormais à la recherche de formes possédant des propriétés particulières. On appelle forme tout ensemble de cellules isolé dans la grille. La Figure 4.3 donne plusieurs

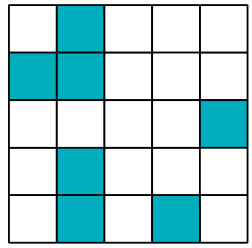


FIGURE 4.2 – Exemple 4

exemples de formes.

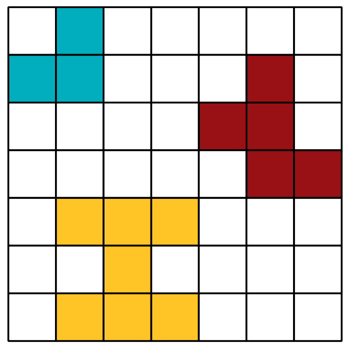


FIGURE 4.3 – Trois exemples de formes

4.2.1 Formes stables

On veut tout d'abord trouver des formes qui n'évoluent jamais quelque soit le nombre de tours joués. Existe-t-il de telles formes...

— dont toutes les cellules sont adjacentes les unes aux autres ?
— dont les cellules ne sont pas toutes adjacentes les unes aux autres ?
— ne possédant aucune symétrie ?
— possédant une infinité de cellules ?

4.2.2 Formes oscillantes

On s'intéresse désormais à des formes qui reprennent leur état d'origine au bout d'un certain nombre de tours (ou *période*). Une forme oscillante de période n reprend sa forme d'origine au bout de n tours.

Pour commencer, pouvez-vous proposer une forme oscillante de période 2 ? On donne ensuite la forme suivante (Figure 4.4), appelée pulsar :

Que pouvez-vous en dire ?

Que se passe-t-il si l'on met côte à côte la forme précédente avec celle de période 2 que vous avez trouvé ?

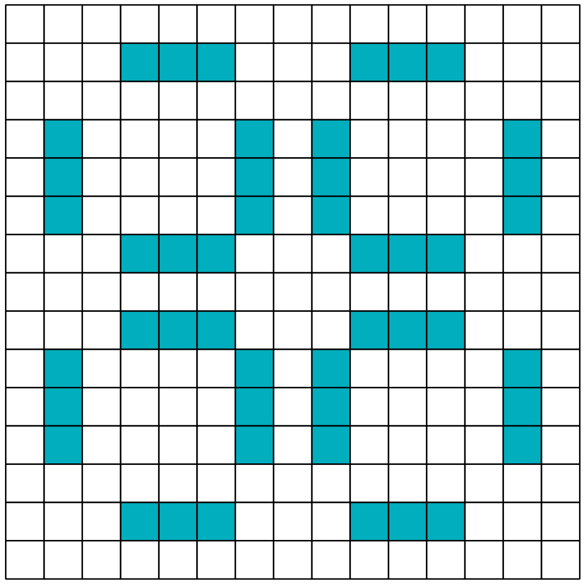
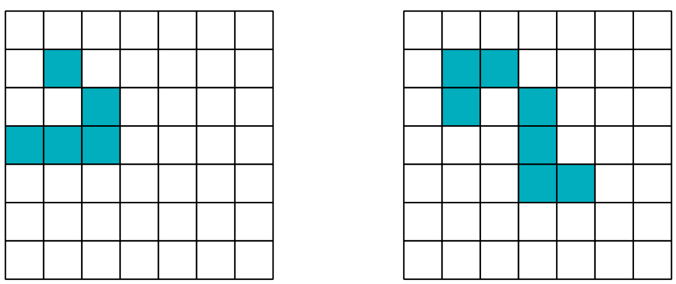


FIGURE 4.4 – Pulsar

4.2.3 Plus de formes

Observez le comportement de la forme donnée Figure 4.5a. Que se passe-t-il ?
Regardez maintenant la forme donnée Figure 4.5b. Que pouvez-vous en dire ?



(a) Forme mystère (b) Forme mystère 2

FIGURE 4.5 –

Que se passe-t-il si l'on met en relation les deux formes précédentes, par exemple comme dans la Figure 4.6 :

4.2.4 À vous de jouer

Pouvez-vous trouver d'autres formes particulières, ou des formes plus complexes possédant des propriétés que l'on a déjà découvertes ?

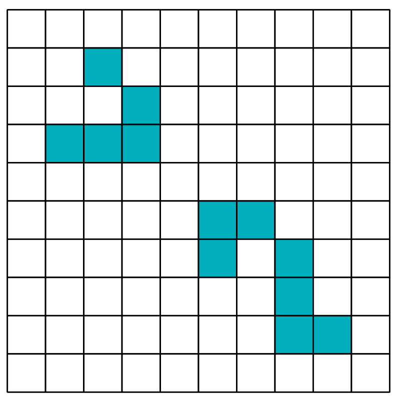


FIGURE 4.6 –

Chapitre 5

Galton Watson

5.1 Présentation

Parmi les nombreuses espèces animales aujourd'hui en voie de disparition, certaines ne comptent plus que quelques dizaines d'individus. Comment estimer leur probabilité d'extinction ? Un modèle introduit à la fin du 19ème siècle par Galton et Watson permet de s'en faire une idée.

5.2 Première génération

Supposons, pour donner un exemple concret, que chaque individu a au cours de sa vie

— aucun enfant avec probabilité $1/4$,
— un enfant avec probabilité $1/4$,
— deux enfants avec probabilité $1/2$.

Les nombres d'enfants d'individus différents sont supposés indépendants les uns des autres.

Quelle est la probabilité que la population s'éteigne dès la première génération ? S'il y a initialement 2 individus, que devient cette probabilité ? S'il y a initialement N individus ?

5.3 Générations suivantes

Notons q_1 la probabilité d'extinction en une génération. Quelle est la probabilité d'extinction au bout de deux générations ? On pourra l'exprimer en fonction de q_1.
Au bout de 3 générations ? On pourra l'exprimer en fonction de q_2, la probabilité d'extinction au bout de deux générations.
Au bout de n générations ? On pourra l'exprimer en fonction de q_{n-1}, la probabilité d'extinction au bout de $n-1$ générations.

Quel est le comportement de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Quelle est la probabilité d'extinction ?

5.4 Distribution générale à 2 enfants

Supposons que chaque individu n'a pas d'enfants avec probabilité p_0, 1 enfant avec probabilité p_1, et 2 enfants au plus, avec probabilité p_2. On sait que chaque p_i est compris entre 0 et 1 et que $p_0 + p_1 + p_2 = 1$.

Quelle est la probabilité que la population soit éteinte après n générations pour un seul ancêtre ? Quelle est la probabilité d'extinction de la population ?

5.5 Distribution générale à k enfants

Supposons que chaque individu n'a pas d'enfants avec probabilité p_0, 1 enfant avec probabilité p_1, et ainsi de suite jusqu'à un nombre maximal de k enfants avec probabilité p_k. On sait que chaque p_i est compris entre 0 et 1 et que $p_0 + \ldots + p_k = 1$.

Quelle est la probabilité que la population soit éteinte après n générations pour un seul ancêtre ? Quelle est la probabilité d'extinction de la population ?

Chapitre 6

Automates

D'après une idée originale de Marc Filippi.

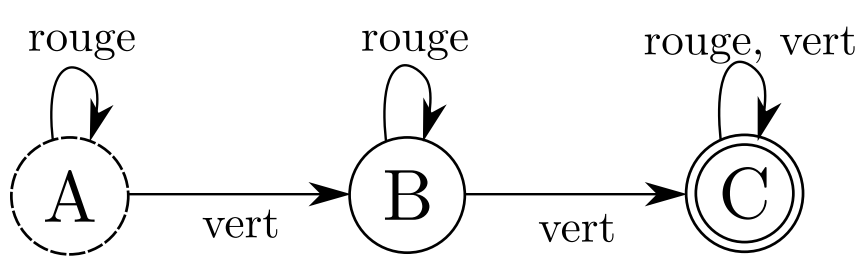
6.1 Présentation

Dans cette activité, on s'intéresse à la construction d'automates qui reconnaissent si une pile de gobelets vérifie une règle prédéfinie. Par exemple, est-ce que la pile de gobelets contient deux gobelets verts à la suite ? Est-ce que la pile de gobelets finit par un gobelet rouge ?

Un automate se présente sous la forme de cercles (appelés *états*) reliés par des traits (appelés *transitions*) et fonctionne de la manière suivante :

- On place la pile de gobelets sur le cercle en pointillés, appelé *état initial*.
- On déplace la pile de gobelets sur l'état indiqué par la flèche correspondant à la couleur du gobelet en haut de la pile, et l'on retire ce gobelet.
- On continue jusqu'à ce qu'un des évènements suivants se produise :
  - Aucune flèche ne correspond à la couleur du gobelet du haut, et la pile est rejetée par l'automate.
  - La pile est vide et je me trouve sur l'état final, représenté par un double cercle. La pile est alors acceptée par l'automate.
  - La pile est vide et je me trouve sur un autre état que l'état final. La pile est alors rejetée par l'automate.

Voici un exemple d'automate pour des gobelets rouges et verts qui accepte uniquement les piles contenant au moins deux gobelets verts :



6.2 Prise en main

Déterminez la règle reconnue par chacun des automates suivants pour des gobelets verts et rouges :

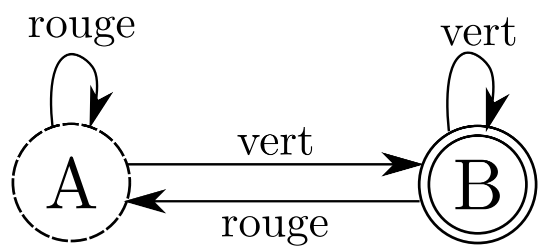


Figure 6.1 – Automate #1

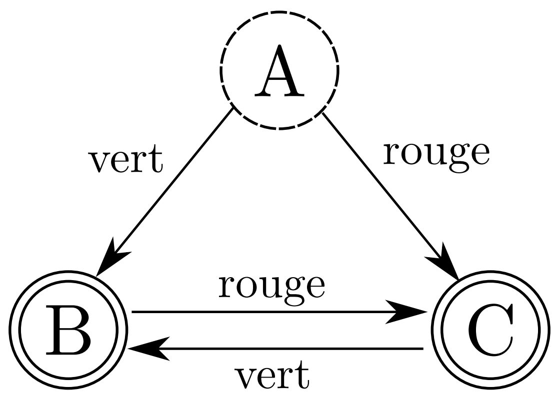


Figure 6.2 – Automate #2

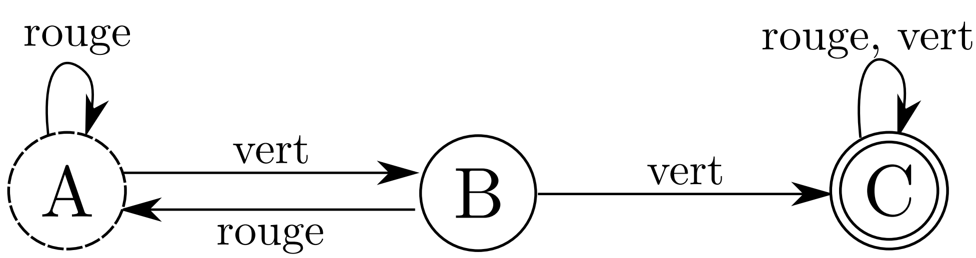


Figure 6.3 – Automate #3

6.3 Construction d'automates

6.3.1 Avec des gobelets verts et rouges

1. Construire un automate qui accepte uniquement les piles finissant par deux gobelets rouges.
2. Construire un automate qui accepte uniquement les piles ne contenant que des gobelets verts puis que des gobelets rouges.
3. Construire un automate qui accepte uniquement les piles commençant par un gobelet vert et finissant par un gobelet rouge.
4. Construire un automate qui accepte uniquement les piles contenant au moins un gobelet de chaque couleur.
5. Construire un automate qui accepte uniquement les piles contenant au moins deux gobelets verts consécutifs, ou deux gobelets rouges consécutifs.
6. Construire un automate qui accepte uniquement les piles dont chaque série de gobelets verts est tout le temps suivie d'au moins un gobelet rouge.
7. Construire un automate qui accepte uniquement les piles contenant un nombre pair de gobelets rouges et un nombre pair de gobelets verts.
8. Construire un automate qui accepte uniquement les piles contenant un nombre pair de gobelets rouges, un nombre pair de gobelets verts et se terminant par un gobelet vert suivi d'un rouge.

6.3.2 Avec des gobelets verts, rouges et bleus

1. Construire un automate qui accepte uniquement les piles qui ne contiennent jamais deux gobelets consécutifs de la même couleur.
2. Construire un automate qui accepte uniquement les piles qui ne contiennent que des gobelets bleus, puis que des gobelets verts, puis que des gobelets rouges.

6.3.3 Pour aller plus loin

On appelle automate fini tout automate qui contient un nombre fini d'états.

1. Peut-on construire un automate fini qui accepte les piles contenant autant de gobelets rouges que de verts ?
2. Peut-on construire un automate infini qui accepte les piles contenant autant de gobelets rouges que de verts ?
3. Pouvez-vous imaginer des règles qu'aucun automate fini ne peut vérifier ?

Chapitre 7

Les prisonniers et les enveloppes

La directrice d'une prison un peu joueuse propose un jeu à ses $2n$ prisonniers. Dans une pièce à part, elle aligne sur une table $2n$ enveloppes (non fermées) contenant chacune le nom d'un des prisonniers. Ainsi, le nom de chaque prisonnier se trouve dans une enveloppe et chaque enveloppe ne contient qu'un seul nom.

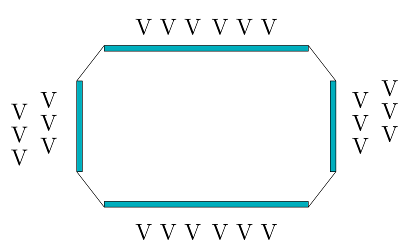
Le jeu est le suivant : à tour de rôle, chaque prisonnier est emmené dans la pièce et il peut ouvrir n des $2n$ enveloppes. Si, après que tout le monde soit passé, tous les prisonnier ont ouvert l'enveloppe contenant leur noms, ils sont tous libérés. Bien évidemment, aucune communication entre les prisonniers n'est possible lorsque le jeu a commencé mais ils peuvent convenir d'une stratégie avant que le jeu ne commence.

Quelle stratégie mettriez-vous en place ? Quelles seraient vos chances de succès ?

Chapitre 8

Enigmes

1. On a besoin de trois nombres à cinq chiffres pour ouvrir un coffre, mais certains des chiffres ont été effacés ! On sait que le premier nombre est 15728, le second $22 \cdot 04$ et le dernier $\cdot \cdot 331$. $\cdot$ représente les différents chiffres ayant été effacés et que la somme des trois nombres vaut 59963. Quels sont les trois chiffres pouvant se cacher derrière les $\cdot$?
   0, 2 et 2   1, 2 et 9   2, 4 et 9   2, 7 et 8   5, 7 et 8
2. Un fermer possède un troupeau de vaches, mais oublie toujours le nombre exact de vaches dans son troupeau. Pour les compter, il s'assure qu'il en voit 6 depuis chaque fenêtre de sa maison, comme sur le dessin ci-dessous. Une nuit, un voleur emporte la moitié de ses vaches, mais le fermier ne s'en aperçoit pas. Comment le voleur a-t-il fait ?



3. Le père fourras pose une question très difficile a un candidat de Fort Boyard. Il décide de lui laisser 9 minutes pour répondre ! Cependant, il ne dispose que d'un sablier de 4 minutes et un autre sablier de 7 minutes. Comment faire pour mesurer 9 minutes avec des 2 sabliers ?
4. Un homme qui n'a pas vu un de ses amis depuis des années lui rend visite pour prendre de ses nouvelles. Depuis le temps, son ami a eu trois filles. Etonné, notre homme lui demande leurs âges, mais son ami refuse de lui répondre directement, car il veut lui donner la réponse sous la forme d'une énigme : - Le produit de leurs âges fait 36 et la somme donne le numéro de la maison d'en face. Sur ce, l'homme va examiner la maison de l'autre côté de la rue, mais revient en affirmant qu'il lui manque un élément. - C'est vrai, répond son ami, je dois te préciser que l'aînée est blonde. Effectivement, avec ces informations, l'homme trouve.

Quel est l'âge de ces trois filles ?

5. Un homme devait faire traverser un loup, une chèvre et un très gros chou dans un bateau. Le bateau était tellement petit, qu'il ne pouvait embarquer qu'un des trois et lui-même pour chaque traversée.

   Comment peut-il faire pour les faire traverser tous les trois sans laisser l'occasion au loup de manger la chèvre ou à la chèvre de manger le chou ?

6. Une chenille veut monter le long d'un mur de 10 mètres de haut, mais celle-ci est malade alors elle monte 3 mètres le jour et descend 2 mètres la nuit.

   Combien de journées lui faudra t-elle pour monter le mur ?

7. Quatre amis Bintou, Nabou, Babacar, Demba vont acheter un briquet, une baguette de pain, du pain au lait et un kilo de riz pour des prix de 145FCFA, 150FCFA, 155FCFA, 160FCFA , mais le vendeur oublie la commande exacte. Il se souvient que chacun des amis a acheté un objet différent et que :
   — Demba a commandé un objet plus cher que Nabou.
   — Bintou a acheté l'objet qui coûte 155FCFA.
   — L'objet coûtant 150 FCFA, l'objet de Nabou et celui de Demba sont tous différents.
   — Le briquet coûte 10FCFA de moins que le pain au lait.
   — L'objet coûtant 145 FCFA est soit le pain, soit celui de Demba.

   Qui a acheté quel objet, et pour combien ?

8. Il y a 196 jambes et 126 yeux à un concours canin. En partant du principe que tout le monde a un nombre normal de jambes et d'yeux, combien il y a t'il d'humains et de chiens ?

9. On a deux tasses identiques remplies au même niveau, une contenant du lait, l'autre du café. On prend une cuillère de lait que l'on verse dans la tasse de café puis on mélange. On prend ensuite une cuillère de café au lait que l'on verse dans la tasse de lait. Quelle tasse contient le plus de café ?

10. Un marchand peut ranger 8 grandes boîtes ou 10 petites boîtes dans un carton. En une livraison, il a envoyé un total de 96 boîtes et il y avait plus de grandes boîtes que de petites. Combien de cartons a-t-il envoyé ?

11. Comment faire pour dessiner 4 triangles en utilisant exactement 6 allumettes identiques ? Même question avec 8 triangles ?

12. Commment obtenir 24 en utilisant une et une seule fois chacun les chiffres 1, 5, 5 et 5.

13. Relier tous les points en utilisant uniquement 4 segments.