Animath au Sénégal : Sénémath
Présentation des ateliers mathématiques proposés

25-29 Mars 2019

Table des matières

1 Pavage et dominos **2**

2 Jeu de Nim **3**

3 Jeu des menottes **4**

4 Jeu des chapeaux **5**

5 Introduction à l'algorithmique - Cargobot **6**

6 Chasse à la bête **9**

7 Graphes eulériens **10**

8 Concours intergroupes - petites énigmes **12**

9 Jeu des prisonniers et de l'ampoule **14**

10 Hôtel de Hilbert **15**

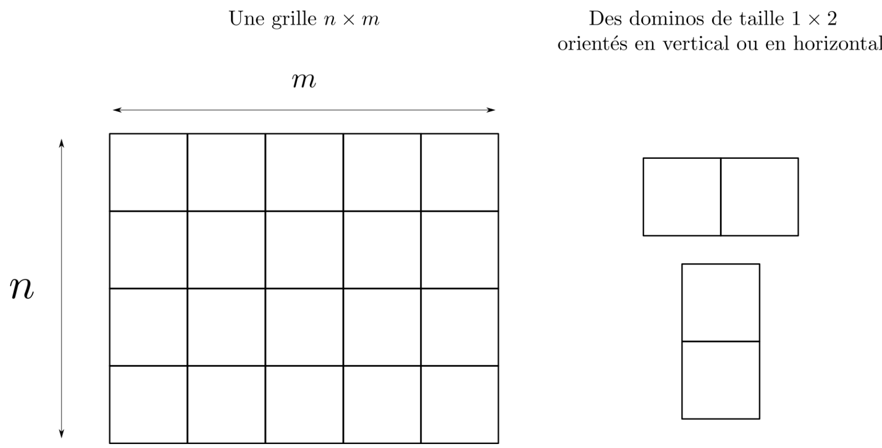
11 Chèvres et voitures **16**

12 Géométrie dans l'espace - découpage du cube avec un plan **17**

1 Pavage et dominos

Proposé à Dakar (lundi & mardi 25-26 mars 2019)

Énoncé On veut paver un grille $n \times m$ avec des dominos de taille 1×2, qu'on peut bien évidemment tourner comme on veut.



▷ **Question 1.**
Peut-on paver n'importe quelle grille, quelque soient les valeurs de m et n ?

▷ **Question 2.**
Si on retire une case n'importe où sur la grille, peut-on toujours paver un grille $n \times m$? Quelles sont les conditions sur n, m et la case retirée ?

2 Jeu de Nim

Proposé à Dakar (mardi 26 Mars 2019)

Énoncé *Jeu de Nim en ligne.* Sur une table, n allumettes sont posées côte à côte. Deux joueurs s'affrontent : chacun des joueurs retire à son tour 1, 2 ou 3 allumettes. Celui qui retire la dernière allumette a perdu.

Figure 2 – Jeu de Nim en ligne : n allumettes sont posées côte à côte.

▷ **Question 1.**
Identifiez une stratégie gagnante. Selon la valeur de n, quel joueur est assuré de gagner s'il joue parfaitement ?

3 Jeu des menottes

Proposé à Dakar (mardi 26 Mars 2019)

Ce jeu est un petit casse-tête de topologie. Celui-ci est pour deux joueurs que l'on attache ensemble. C'est ainsi un bon jeu pour permettre aux participants de se rencontrer et de fraterniser. On les attache donc de la façon suivante

Note. Les images présentées ici proviennent du site internet `https://puzzlewocky.com/parlor-games/string-handcuffs-puzzle/`.

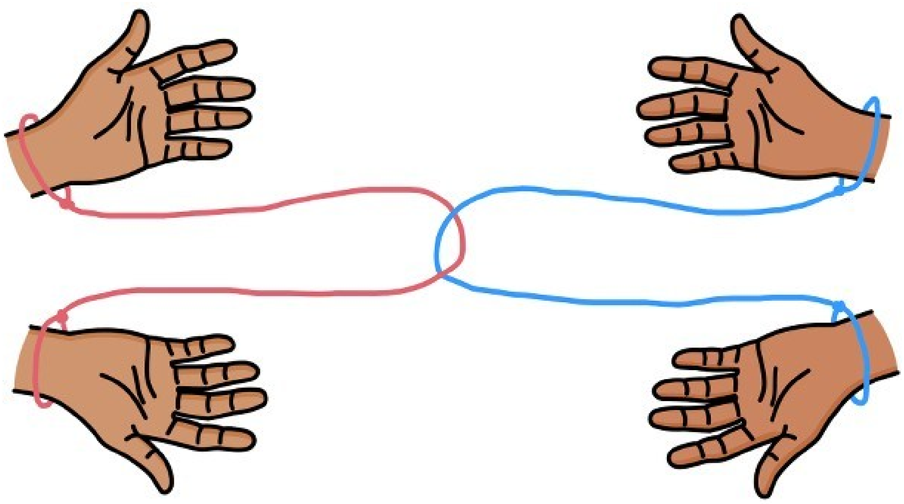


FIGURE 3 – Jeu des menottes : comment attacher les menottes.

▷ **Question 1.**

Comment les deux participants peuvent-ils se séparer l'un de l'autre ?

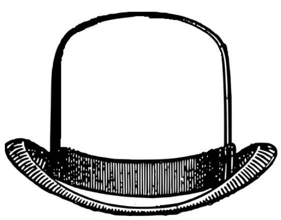
4 Jeu des chapeaux

Proposé à Dakar (mercredi 27 Mars 2019)

Note. Les images utilisées proviennent des stocks d'images 123RF et publicdomainvectors.

Énoncé Dans une prison, un gardien s'ennuie et veut proposer un jeu aux 100 prisonniers qu'il surveille. Il va alors leur proposer un test pour qu'ils puissent obtenir leur libération s'ils réussissent. Il les réunit dans une salle, leur annonce les règles de ce test et leur donne la nuit pour y réfléchir. Voici le test :

Les prisonniers sont placés en file indienne du plus grand au plus petit. Le gardien dispose de chapeaux de deux couleurs différentes, blanc et noir, qu'il dépose au hasard sur la tête de chaque prisonnier. On ne connaît pas le nombre de chapeaux noirs, ni le nombre de chapeaux blancs. Chaque prisonnier ne voit pas la couleur de son chapeau, mais voit la couleur des chapeaux des prisonniers placés devant lui : le premier voit 99 chapeaux, le second voit 98 chapeaux et le dernier ne voit rien. Les prisonniers ont bien sûr l'interdiction de communiquer entre eux, se retourner ou de se décaler pendant le test.



Puis, le gardien demande à chaque prisonnier de la file indienne, à tour de rôle, de deviner la couleur de son chapeau, en commençant par le plus grand. Ils ne peuvent dire que *"noir"* ou *"blanc"* (sans intonation dans la voix, vitesse de prononciation ou autre technique pour donner des informations aux autres) au risque de retourner en prison à vie. Chacun entend la réponse du prisonnier interrogé, mais personne ne sait si elle était juste ou fausse. C'est une fois que tous les prisonniers ont parlé que le gardien annonce le résultat.

La règle est simple : si au moins 60 prisonniers donnent la couleur de leur chapeau, alors ils seront toux libérés. Sinon ils retournent tous en prison.

▷ **Question 1.**
À la place des prisonniers, quelle(s) stratégie(s) proposeriez-vous ?

▷ **Question 2.**
Le matin du test, le gardien se pose des questions sur son test, il a peur qu'il soit trop facile. Il se demande si la règle est bonne et pense augmenter le nombre minimal de bonnes réponses à 75. Que pensez-vous de sa proposition : permet-elle de réduire les chances de victoires des prisonniers ?

5 Introduction à l'algorithmique - Cargobot

Proposé à Dakar (mercredi 27 Mars 2019)

Note. Ce sujet a été inspiré des travaux *Cargobot* de l'Irem de Grenoble, ainsi que du site dédié aux problèmes de Cargobot du laboratoire Verimag.

Énoncé Le jeu consiste à manipuler des containers à l'aide d'une grue. Les containers peuvent être de 4 couleurs différentes : bleu, rouge, vert ou jaune.

L'état initial de la grue et des containers est donné, ainsi que l'état final qu'on désire atteindre. Un jeu d'instructions doit être donné avant que la grue ne commence à bouger, et aucune instruction ne peut être ajoutée ni modifiée pendant que la grue bouge.

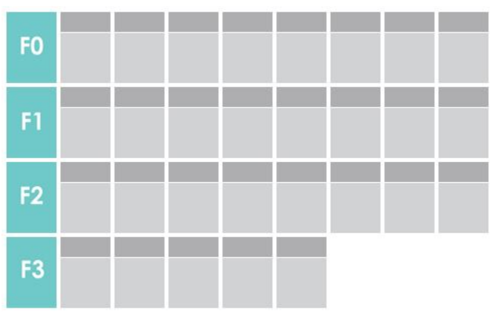
L'objectif est donc de donner un ensemble d'instructions qui permettent de passer de l'état initial à l'état final. Idéalement, un nombre minimum d'instructions devrait être utilisé.

Déplacement de la grue. Il existe 3 façons de déplacer la grue :

- Déplacer la grue d'un cran sur la droite
- Déplacer la grue d'un cran sur la gauche
- La grue descend. Si elle est vide quand elle entame la descente :
  - S'il y a un container en-dessous, elle l'attrape et remonte avec
  - S'il n'y a pas de container en-dessous, elle remonte vide

  Si elle tient un container, elle le pose et remonte vide

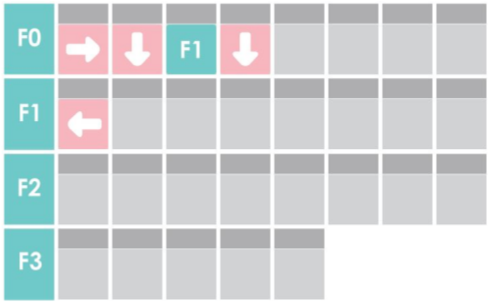
Les groupes d'instructions. Les instructions peuvent être rangées dans 4 groupes d'instructions. Les 3 premiers groupes peuvent accueillir au maximum 8 instructions, le 4e groupe ne peut accueillir que 5 instructions maximum.



Lorsqu'un groupe d'instruction est réalisé, toutes les instructions sont réalisées l'une après l'autre, en partant de l'instruction la plus à gauche pour finir sur celle le plus à droite.

Le groupe F_0 est naturellement lancé au début de la simulation. Pour que les autres groupes soient exécutés depuis le début, il faut appeler la commande correspondant au nom du groupe : F0 F1 F2 F3.

Si un groupe est appelé alors qu'on est en train de réaliser un lot d'instructions, les instructions du groupe appelé sont entièrement effectuées, avant de revenir finir le groupe précédemment en cours d'exécution. Un groupe peut être appelé dans lui-même. Un premier exemple :



revient à exécuter 

Les conditions. Dans certains cas, il peut être bien de n'exécuter une instruction que pour certaines situations. Au dessus de chaque instruction, une condition peut être ajoutée. L'instruction ne sera exécutée que si la condition est vraie. Les situations pouvant être testées sont les suivantes :

 La grue est vide

 La grue tient un container, peu importe sa couleur

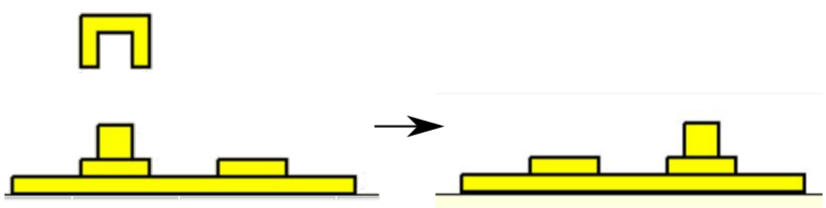
 La grue tient un container rouge

 La grue tient un container vert

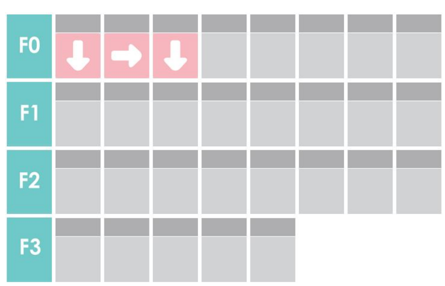
 La grue tient un container jaune

 La grue tient un container bleu

Ci-dessous un exemple de situation finale qu'il faut atteindre à partir d'une situation initiale, ainsi que le jeu d'instructions pour résoudre le problème.



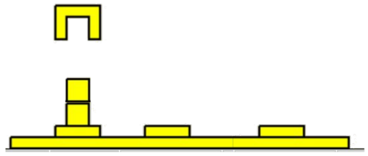
Situation initiale Situation finale



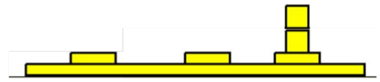
Résolvez les problèmes suivants. Le nombre minimal d'instructions est indiqué pour chaque problème. Une fois que vous pensez avoir la solution, appelez un encadrant, pour qu'il s'assure de la justesse de la réponse.

▷ **Question 1.**

Nombre minimum d'instructions : 5.



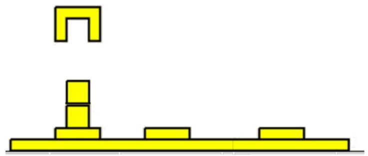
Situation initiale



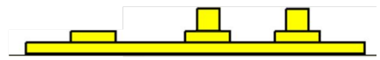
Situation finale

▷ **Question 2.**

Nombre minimum d'instructions : 5.



Situation initiale

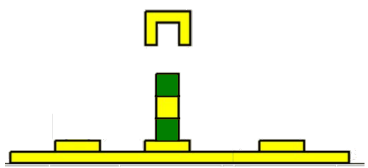


Situation finale

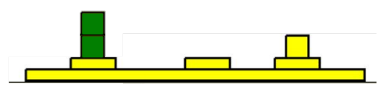
▷ **Question 3.**

Nombre minimum d'instructions : 10.

Commencez par résoudre ce problème tel que proposé. Puis imaginez qu'il y a une suite de 100 containers verts et jaunes aléatoirement empilés sur l'emplacement du milieu. Il vous faut maintenant trier cette grande pile. Quelle que soit la façon dont sont disposés les containers, le robot met les verts à gauche, les jaunes à droite.



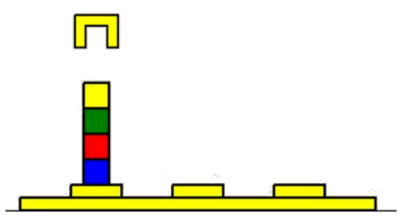
Situation initiale



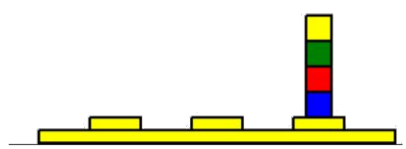
Situation finale

▷ **Question 4.**

Nombre minimum d'instructions : 5.



Situation initiale



Situation finale

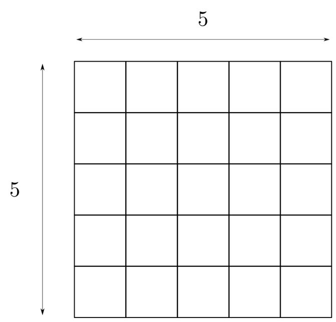
6 Chasse à la bête

Proposé à Dakar (mercredi 27 Mars 2019)

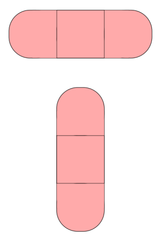
Énoncé Un jardinier veut protéger son jardin des bêtes volantes qui essayent de manger ses légumes. Pour cela, il pose des pièges dans son jardin pour empêcher les bêtes d'atterrir. Il veut s'assurer de poser assez de pièges pour qu'aucune bête ne puisse pénétrer sur sa propriété. Mais les pièges coûtant cher, il veut également en utiliser le moins possible.

Le jardin se présente sous la forme d'un quadrillage de taille 5×5. Un piège occupe une case. Une bête occupe 3 cases adjacentes verticalement ou horizontalement, et elle ne peut pas se poser s'il y a un piège sur une des cases qu'elle occupe.

Une grille 5×5



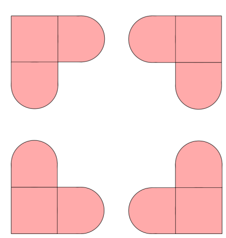
Des bêtes de taille 1×3 orientées verticalement ou horizontalement



▷ **Question 1.**
Quel est le nombre minimal de pièges que le jardinier doit utiliser pour empêcher les bêtes de rentrer sur son terrain ? Comment doit-il les positionner ? Justifier que c'est effectivement le nombre minimal de pièges nécessaires.

Énoncé Les bêtes changent de forme. Elles continuent à occuper 3 cases à la fois, mais forment à présent des coudes, tel qu'illustré ci-dessous. Elles peuvent être orientées dans toutes les directions.

Des bêtes qui occupent 3 cases formant un coude orientées de toutes les façons possibles



▷ **Question 2.**
Combien de pièges sont nécessaires au minimum ? Comment doivent-ils être positionnés dans le jardin ? Justifiez que c'est le nombre de pièges minimal !

7 Graphes eulériens

Proposé à Dakar (jeudi 28 Mars 2019)

Les graphes sont des représentations abstraites de réseaux reliant des objets. Ils sont constitués de *sommets* représentant les objets, qui sont connectés entre eux par des *arêtes*. Une arête part d'un sommet, pour le relier à un unique autre sommet.

Les graphes étant des représentations abstraites, la forme des arêtes, ou la position des sommets sur la feuille n'importent pas. Pour que deux graphes soient identiques, il suffit qu'il y ait les mêmes sommets. Et que si un sommet qu'on appelle A est relié au sommet B dans un des graphes, alors il faut que ce soit également le cas dans l'autre graphe.

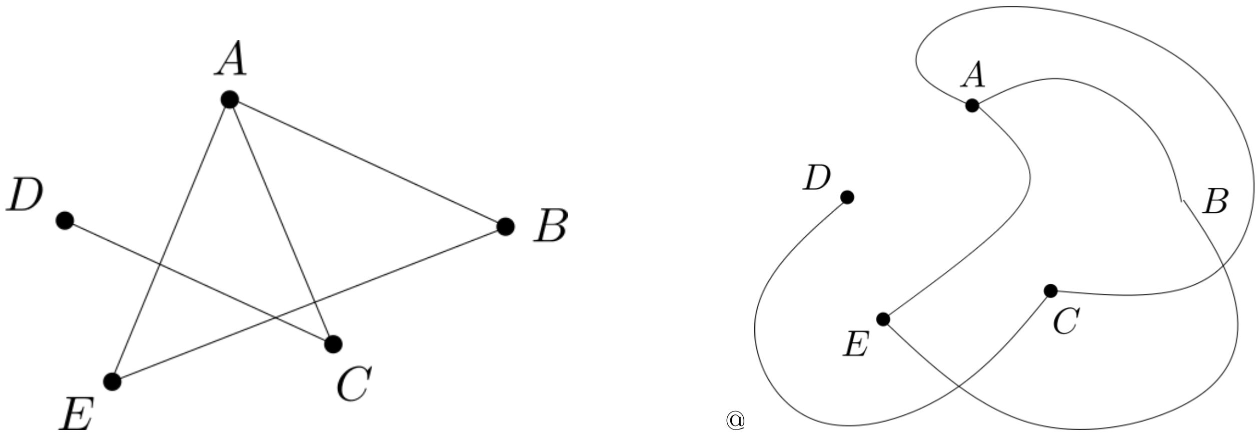


FIGURE 12 – Deux exemples de graphes identiques : la forme des arêtes n'importe pas, seul importe que les mêmes sommets soient reliés entre eux dans les deux graphes.

Les graphes sont des objets mathématiques très utilisés. Ils peuvent par exemple servir à représenter des réseaux routiers. Les sommets représentent les villes, les arêtes représentent les routes. S'il existe une route directe entre la ville i et la ville j, alors il y a une arête entre les deux sommets des villes. Ils peuvent aussi servir à représenter des relations entre des personnes par exemple. Ainsi, Facebook utilise des graphes, où chaque personne est un sommet, et si deux personnes sont amies sur Facebook, alors il existe une arête reliant ces deux personnes. Il existe de nombreux autres exemples d'utilisation pratique des graphes...

On définit les **graphes eulériens** comme des graphes tels qu'on peut parcourir toutes les arêtes du graphe une et une seule fois, sachant que si on parcourt l'arête i, reliant les sommets X et Y, et qu'on la parcourt en allant de X vers Y, alors, la prochaine arête parcourue devra nécessairement partir de Y pour aller vers un autre sommet. Autrement dit, si on dessine le graphe sur une feuille de papier, on doit pouvoir poser son crayon sur un premier sommet, suivre toutes les arêtes du graphe une seule fois avec le crayon et arriver à un sommet (l'initial ou un autre) sans jamais avoir levé le crayon ou sans être passé deux fois par une arête.

Par exemple, le graphe de la Figure 12 est eulérien. En effet, si on pose le crayon sur le sommet D, puis que suivant les arêtes, on parcourt les graphes en passant respectivement par les sommets $D \to C \to A \to E \to B \to A$. On est alors passé une et une seule fois par toutes les arêtes du graphe.

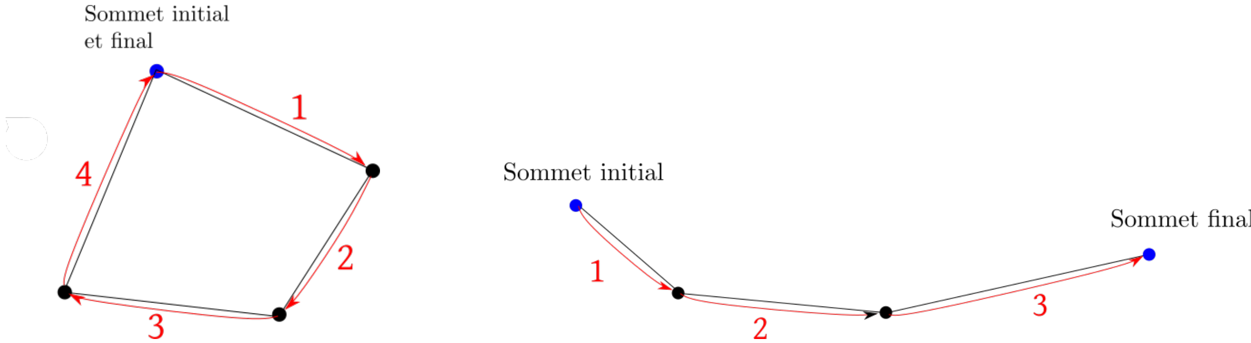


FIGURE 13 – Deux exemples de graphes eulériens. Les graphes sont en noirs. On dessine en bleu le(s) sommet(s) initial et final, en rouge l'ordre dans lequel on parcourt les arêtes. On passe une et une unique fois par toutes les arêtes

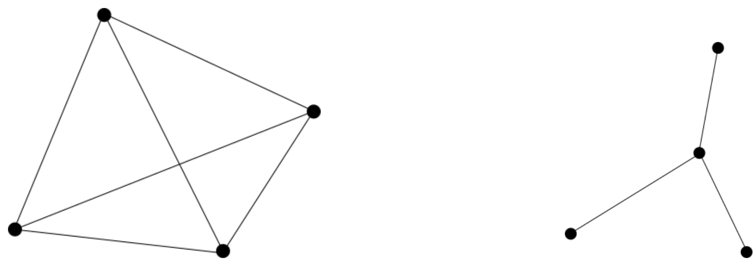


FIGURE 14 – Deux exemples de graphe non eulériens. Quel que soit le sommet par lequel on commence, l'ordre de parcours des arêtes, il manque toujours au moins une arête par laquelle on ne peut pas passer, sans lever le crayon. Attention ! Plier la feuille de papier, ou autres tricheries sont évidemment interdites ! On donne ici une définition mathématique, on ne veut pas être le plus malin ;)

▷ **Question 1.**
Essayez de tracer le graphe suivant d'une traite, sans lever le crayon, ou passer deux fois par une arête. Est-ce que ce graphe est eulérien ?

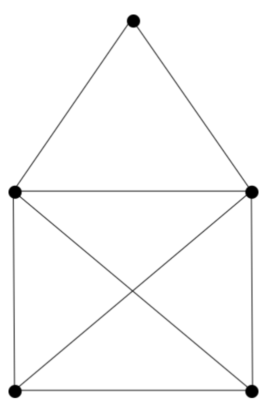


FIGURE 15 – On peut noter que les arêtes se croisent au milieu du rectangle, mais qu'il n'y a pas de sommet à cet emplacement.

▷ **Question 2.**
En étudiant plusieurs graphes, et en étudiant les arêtes ou les sommets par lesquels vous pouvez ou non commencer, déduisez les conditions nécessaires pour qu'un graphe soit eulérien.

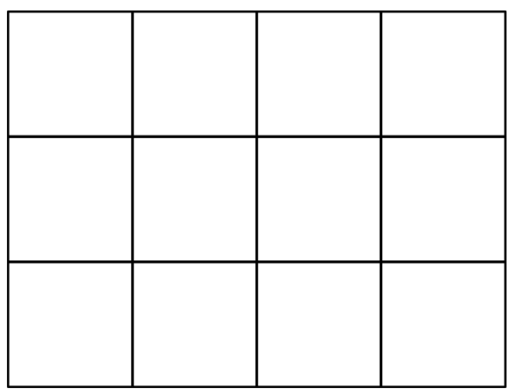
8 Concours intergroupes - petites énigmes

Proposé à Dakar (jeudi 28 Mars 2019)

▷ **Question 1.**
Ajoutez des opérations pour rendre ces égalités vraies. Vous pouvez utilisez toutes les opérations de votre connaissance...

$$\begin{array}{cccl}
2 & 2 & 2 & = 6 \\
3 & 3 & 3 & = 6 \\
4 & 4 & 4 & = 6 \\
5 & 5 & 5 & = 6 \\
6 & 6 & 6 & = 6 \\
7 & 7 & 7 & = 6 \\
8 & 8 & 8 & = 6 \\
9 & 9 & 9 & = 6
\end{array}$$

▷ **Question 2.**
Combien y a-t-il de rectangles distincts dans la figure suivante ?



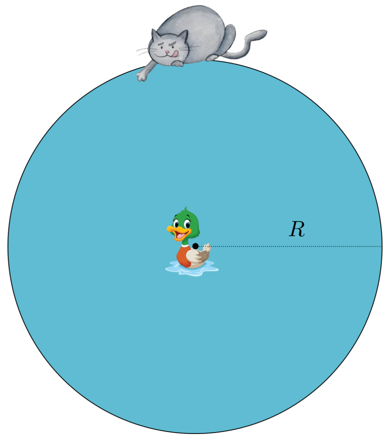
▷ **Question 3.**
Déplacer un seul chiffre de l'équation pour qu'elle devienne vraie.

$$62 - 63 = 1$$

▷ **Question 4.**
On dispose de 6 allumettes, de côté 1. En utilisant uniquement ces 6 allumettes, on veut tracer 4 triangles équilatéraux distinct, de longueur 1 (1 allumette). Comment doit-on faire ?

▷ **Question 5.**
On dispose de 10 verres. On veut positionner les 10 verres, de façon à ce qu'on puisse tracer 5 segments distincts, chacun passant par le centre de 4 verres. Comment doit-on les positionner ?

▷ **Question 6.**
Un canard nage tranquillement dans un lac, quand arrive un chat, qui s'arrête tout au bord du lac. Le chat a faim, et aimerait manger le canard, mais comme il a peur de l'eau, il est obligé d'attendre que ce dernier sorte du lac. Le pauvre canard étant blessé, il est obligé de revenir sur la terre ferme pour pouvoir prendre son envol. Le canard n'a besoin que d'avoir le temps d'arriver au rivage avant le chat, pour pouvoir décoller et échapper à ce dernier.



Montage utilisant des images des stock d'images Shutterstock et 123RF

Nous savons que :
- Le lac est circulaire.
- Le canard est au centre du lac quand l'exercice commence.
- Le chat court sur la terre ferme 4 fois plus vite que le canard nage.
- Le chat fait tout son possible pour attraper le canard : il se dirige toujours depuis le rivage vers le point d'arrivée du canard lors de son mouvement. Il peut également ralentir, il ne va pas à sa vitesse maximale si ce n'est pas avantageux pour lui.
- Ni le canard ni le chat ne se fatiguent, et ils disposent d'un temps infini.
- Le canard ne peut PAS nager sous l'eau pour que le chat ne sache pas où il est.

Connaissant cela, le canard a-t-il une chance de s'en sortir et de pouvoir atteindre la terre ferme sans que le chat ne l'attende déjà au bord ? Comment doit-il faire ?

9 Jeu des prisonniers et de l'ampoule

Proposé à Dakar (jeudi 28 Mars 2019)

Un gardien de prison un peu sadique veut s'amuser avec ceux qu'il doit garder. Il leur annonce qu'à partir du lendemain, chacun des 100 prisonniers sera enfermé dans sa cellule, et n'aura plus aucun moyen de communiquer avec ses voisins.

Ensuite, chaque jour, le gardien désignera aléatoirement un prisonnier, qui sera emmené dans une salle de la prison. Cette salle est strictement vide, rien ne peut servir à laisser un message à ses codétenus, en dehors d'une unique ampoule, qui peut prendre deux états : être allumée ou éteinte.

Le gardien annonce aux détenus que si un d'eux peut un jour lui annoncer avec certitude que chacun des prisonniers est passé au moins une fois dans la cellule depuis le début du "jeu", alors ils seront tous libérés. Mais si la personne se trompe, alors ils seront tous exécutés.

Il leur annonce également que le seul moyen de communication autorisé est l'extinction ou l'allumage de l'ampoule. Quand un prisonnier arrive dans la salle, il peut choisir d'éteindre la lumière si elle est allumée, d'allumer la lumière si elle est éteinte, ou de ne pas y toucher, quel que soit son état. Il leur sera impossible de tricher. La salle est lavée, éventuellement réparée, tous les jours. Les couloirs et les cellules des détenus sont strictement insonorisés. Et surtout, si l'un d'eux venaient à être pris à tricher, ils seraient tous exécutés ! De plus, les visites des détenus dans la salle sont espacées, nul moyen de savoir depuis combien de temps l'ampoule est éteinte ou allumée, etc...

▷ **Question 1.**

Les prisonniers ont la fin de la journée pour discuter ensemble d'une stratégie, puis le jeu commence. Quelle stratégie doivent-ils mettre en place pour savoir à coup sûr que chacun d'entre eux est allé au moins une fois dans la pièce ?

10 Hôtel de Hilbert

Proposé à Dakar (vendredi 28 Mars 2019)

Le problème de l'hôtel de Hilbert est un exercice très sympa pour travailler sur la notion d'infini. Vous avez un hôtel infini qu'on appelle l'hôtel de Hilbert et une infinité de clients qui occupent les chambres.

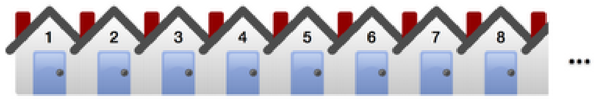


FIGURE 18 – Hôtel de Hilbert

Note. les images présentées ici proviennent du site `http://pedazosdecarbono.blogspot.com/2012/05/bienvenidos-al-hotel-hilbert.html`)

▷ **Question 1.**

Une personne arrive à l'hôtel et demande une chambre. Comme l'hôtel est infini, il y aura toujours de la place pour le nouvel arrivant. Cependant, le gérant de l'hôtel voudrait lui donner une clé avec son numéro de chambre. Un nombre infini de chambres étant occupées, on ne peut pas tout simplement donner au nouvel arrivant la clé $\infty + 1$, ce n'est pas un numéro de chambre !

Le gérant de l'hôtel a toutefois le droit de demander aux clients de déménager de chambre une fois. Mais il doit toujours être capable de donner un numéro de chambre concret au client à partir de son numéro de chambre précédent.

Comment, en déplaçant les clients déjà présents, le maître d'hôtel peut-il procéder pour libérer une chambre ?

▷ **Question 2.**

Même question avec un bus transportant un nombre infini de personnes, arrivant à l'hôtel. Il y a un nombre infini de chambres, donc assez de place pour tout le monde. Cependant, le gérant doit toujours pouvoir donner un numéro de chambre concret à un client, soit à partir de son précédent numéro de chambre s'il était déjà dans l'hôtel, soit à partir de son numéro de place dans le bus.

Attention, on ne peut pas indéfiniment déplacer les gens ! Chaque client peut être déplacé au maximum une fois et avoir un numéro précis de chambre vers laquelle se diriger.

▷ **Question 3.**

Même question avec une infinité de bus, chacun occupé par une infinité de personnes.

11 Chèvres et voitures

Proposé à Dakar (vendredi 28 Mars 2019)

Énoncé Un participant joue au fameux jeu télévisé *Des portes et des sous*. Sur le plateau du jeu se trouvent trois portes. Derrière les 3 portes fermées sont cachées deux chèvres et une Ferrari.

Le jeu se déroule en deux phases. Pour commencer, le participant choisit une porte. A la fin du jeu, il gagnera ce qui se trouve derrière cette porte.

L'animateur ouvre alors une des deux autres portes, et dévoile la chèvre qui se trouvait derrière. Puis il propose au candidat un choix : soit celui-ci garde la porte qu'il avait précédemment choisi, et emporte ce qui est caché derrière cette porte, soit il a le droit de changer d'avis, et de préférer changer de porte, pour gagner ce qui se trouve derrière l'autre porte encore fermée.

Aucun indice ne peut aider notre participant, il n'y a pas de bruit, les portes sont exactement identiques, aucun moyen de tricher pour savoir ce qui se cache derrière les portes.

Images tirées des sites *Dreamstime*, *Gocar* et du stock d'images Istock

▷ **Question 1.**

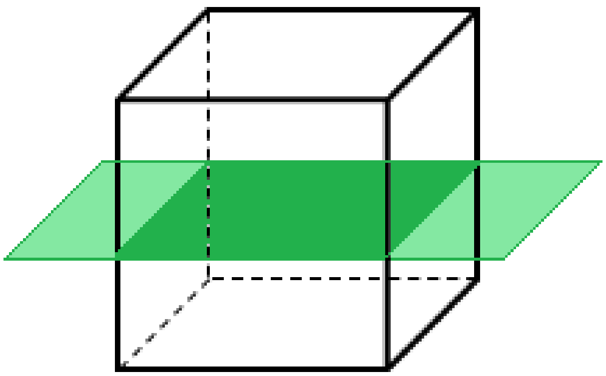
Quelle stratégie doit employer le participant ? Pourquoi ?

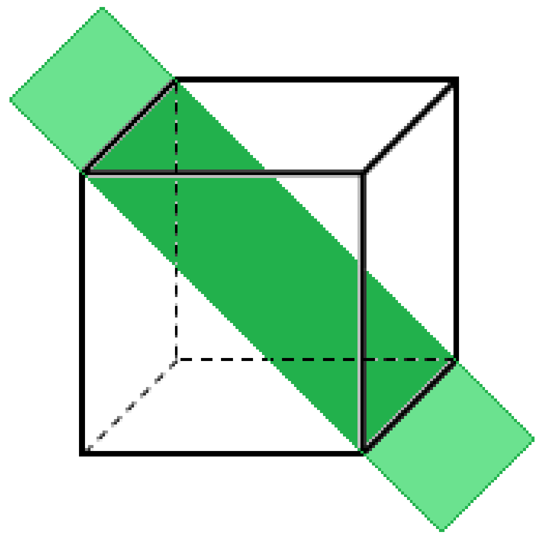
12 Géométrie dans l'espace - découpage du cube avec un plan

Proposé à Dakar (vendredi 28 Mars 2019)

Note. Ce sujet a été inspiré des travaux *Cube slicing* de Navajo Math Cicle ainsi que de *Slicing a Cube* de Emiliano Gómez paru dans le journal Mathematics Teacher. Les illustrations ont été prises des sites Annenberg Learner et Slideplayer.

Énoncé On vous donne un cube et on vous demande de le couper en deux en suivant un plan. Cependant, vous choisissez comment vous positionnez le cube et avec quel angle le plan est orienté.





▷ **Question 1.**
Quelles sont les figures géométriques que vous pouvez obtenir le long de la coupe ? Quelles sont les figures géométriques que vous ne pouvez pas obtenir le long d'une coupe ?

▷ **Question 2.**
Est-ce que l'intersection d'un plan et d'un cube est nécessairement un polygone ?

▷ **Question 3.**
Parmi les formes suivantes, lesquelles peut-on obtenir ? Lesquelles sont impossibles et pourquoi ?

1. Un carré
2. Un rectangle qui ne soit pas un carré
3. Un triangle
4. Un triangle équilatéral
5. Un triangle acutangle (tous les angles sont aigus ($< 90°$))
6. Un triangle obtusangle (au moins un angle est obtus ($> 90°$))
7. Un triangle rectangle
8. Un parallélogramme (qui ne soit pas un rectangle)
9. Un trapèze (qui ne soit pas un parallélogramme)
10. Un quadrilatère non convexe
11. Un losange (qui ne soit pas un carré)
12. Un pentagone
13. Un pentagone régulier

14. Un hexagone
15. Un hexagone régulier
16. Un heptagone
17. Un heptagone régulier
18. Un cercle
19. Un octogone
20. Un octogone régulier

▷ **Question 4.**
Êtes-vous certains que les formes que vous pensez impossibles à obtenir le sont réellement ? Prouvez pour chacune des figures impossibles qu'elle l'est réellement.