

Galton-Watson

Présentation

Parmi les nombreuses espèces animales aujourd'hui en voie de disparition, certaines ne comptent plus que quelques dizaines d'individus. Comment estimer leur probabilité d'extinction ? Un modèle introduit à la fin du 19ème siècle par Galton et Watson permet de s'en faire une idée.

Première génération

Supposons, pour donner un exemple concret, que chaque individu a au cours de sa vie

- aucun enfant avec probabilité $1/4$,
- un enfant avec probabilité $1/4$,
- deux enfants avec probabilité $1/2$.

Les nombres d'enfants d'individus différents sont supposés indépendants les uns des autres.

Quelle est la probabilité que la population s'éteigne dès la première génération ? S'il y a initialement 2 individus, que devient cette probabilité ? S'il y a initialement N individus ?

Génération suivantes

Notons q_1 la probabilité d'extinction en une génération. Quelle est la probabilité d'extinction au bout de deux générations ? On pourra l'exprimer en fonction de q_1 . Au bout de 3 générations ? On pourra l'exprimer en fonction de q_2 , la probabilité d'extinction au bout de deux générations.

Au bout de n générations ? On pourra l'exprimer en fonction de q_{n-1} , la probabilité d'extinction au bout de $n - 1$ générations.

Quel est le comportement de la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Quelle est la probabilité d'extinction ?

Distribution générale à 2 enfants

Supposons que chaque individu n'a pas d'enfants avec probabilité p_0 , 1 enfant avec probabilité p_1 , et 2 enfants au plus, avec probabilité p_2 . On sait que chaque p_i est compris entre 0 et 1 et que $p_0 + p_1 + p_2 = 1$.

Quelle est la probabilité que la population soit éteinte après n générations pour un seul ancêtre ? Quelle est la probabilité d'extinction de la population ?

Distribution générale à k enfants

Supposons que chaque individu n'a pas d'enfants avec probabilité p_0 , 1 enfant avec probabilité p_1 , et ainsi de suite jusqu'à un nombre maximal de k enfants avec probabilité p_k . On sait que chaque p_i est compris entre 0 et 1 et que $p_0 + \dots + p_k = 1$.

Quelle est la probabilité que la population soit éteinte après n générations pour un seul ancêtre ? Quelle est la probabilité d'extinction de la population ?