UNIVERSITÉ GRENOBLE-ALPES Prépa Agreg

Enseignant : Rémi Molinier
remi.molinier@univ-grenoble-alpes.fr

Construction à la règle et au compas

Cette feuille de TD présente la notion de nombre constructible et vous propose des exercices pour travailler celle-ci et des résultats classiques sur le sujet. Un bonne référence sur la constructibilité à la règle et au compas est [Car01]. La définition présentée ici, tirée de [Elk02], est différente de [Car01] mais équivalente. Elle donne une exposition plus synthétique du sujet, ce qui peut permettre un gain de place dans le plan d'un leçon.

1 Définitions et premières propriétés

On identifie le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$.

Définition 1. Soit $\mathscr{B}$ un ensemble fini de points de $\mathbb{C}$ avec au moins deux points.

Les *courbes induites à partir de* $\mathscr{B}$ sont les droites passant par au moins deux points de $\mathscr{B}$ ainsi que les cercles passant par au moins un point de $\mathscr{B}$ et de centre un point de $\mathscr{B}$.

Un point $z \in \mathbb{C}$ est *constructible (à la règle et au compas) en une étape à partir de* $\mathscr{B}$ si z est l'intersection de deux courbes distinctes induites à partir de $\mathscr{B}$.

Un point $z \in \mathbb{C}$ est *constructible (à la règle et au compas) à partir de* $\mathscr{B}$ s'il existe une suite de points $z_1, z_2, \ldots, z_n$ telle que $z_n = z$ et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, z_i est constructible en une étape à partir de $\mathscr{B} \cup \{z_1, \ldots, z_{i-1}\}$. Le nombre n correspond alors au nombre d'*étapes* pour construire z.

On dira que z est constructible (à la règle et au compas) si z est constructible à partir de $\{0, 1\}$. On note $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{C}$ l'ensemble des points constructibles de $\mathbb{C}$ et $\mathscr{C}_{\mathbb{R}} = \mathscr{C} \cap \mathbb{R}$.

Exercice 1 – Quelques constructions classiques
On dit qu'une droite de $\mathbb{C}$ est *constructible* si elle passe par au moins deux points constructibles de $\mathbb{C}$. De même, on dit qu'un cercle est *constructible* si son centre est constructible et qu'il passe par au moins un point constructible.

1) Soit D une droite constructible et z un point constructible. Montrer que la perpendiculaire à D passant par z est constructible. (On ferra attention au fait qu'il y a deux cas : $z \in D$ ou $z \notin D$)

2) Soit D une droite constructible et z un point constructible. Montrer que la parallèle à D passant par z est constructible.

3) Soient z_1 et z_2 deux points constructibles. Montrer que le centre et la médiatrice du segment $[z_1,\, z_2]$ sont constructibles.

4) Soient D_1 et D_2 deux droites constructibles qui ne sont pas parallèles. Montrer que les bissectrices des angles formés par ces deux droites sont constructibles.

5) Soient z_1 et z_2 deux points constructibles. Montrer que le cercle de centre z_1 et de rayon $|z_2|$ est constructible.

Exercice 2 – Quelques résultats élémentaires
Soit $z \in \mathbb{C}$.

1) Monter que z est constructible si et seulement si $\operatorname{Im} z$ et $\operatorname{Re} z$ sont constructibles.

2) Montrer que $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ est constructible si et seulement si r et $\mathrm{e}^{i\theta}$ sont constructibles.

3) Montrer que si $z^2 \in \mathscr{C}$ alors $z \in \mathscr{C}$.

4) Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. [1]

1. Indice : on pourra commencer à montrer la stabilité des opérations pour $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}$ puis utiliser les questions 1 ou 2.

5) En déduire que $\mathbb{Q} \subseteq \mathscr{C}$ et que $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{\mathbb{R}}[i]$.

Exercice 3 – Nombre de nombres constructibles
On note $\mathscr{C}_n$ l'ensemble des nombres constructibles en au plus n étapes.

1) Montrer que $\mathscr{C}_n$ est un ensemble fini.

2) Montrer que $\mathscr{C}$ est infini mais dénombrable.

3) En conclure qu'il existe des nombres non-constructibles.

2 Une caractérisation via la théorie des corps

Exercice 4 – Un Résultat de Wantzel
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $\mathscr{B} = \{0, 1, x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots, x_r + iy_r\}$ un ensemble fini de points de $\mathbb{C}$.

1) Montrer que si z est constructible en une étape à partir de $\mathscr{B}$ alors z est algébrique sur $\mathbb{Q}(i, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_r, y_r)$ et $[\mathbb{Q}(i, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_r, y_r) : \mathbb{Q}(i, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_r, y_r, x, y)] \leq 2$.

2) Montrer que si z est constructible alors il existe une suite de sous-corps de $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$, telle que $z \in K_n$ et pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $[K_{i+1} : K_i] = 2$.

3) Montrer que la réciproque est vraie : si $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$ est une suite de sous-corps de $\mathbb{C}$ avec, pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $[K_{i+1} : K_i] = 2$, alors $K_n \subseteq \mathscr{C}$. [2]

4) Montrer le **Résultat de Wantzel** : si z est constructible alors z est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et son degré est une puissance de 2.

L'exercice suivant donne un contre-exemple à la réciproque du Résultat de Wantzel.

Exercice 5 – Autour de la réciproque du résultat de Wantzel
Soit $P = X^4 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

1) Montrer que P n'a pas de racine sur $\mathbb{Q}$.

2) Montrer que P à deux racines réelles α et β, avec $-1 < \alpha < 0$ et $1 < \beta < 2$, et que P se décompose en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$P = (X^2 + aX + b)(X - \alpha)(X - \beta). \tag{D}$$

[3]

On note $Q = X^2 + aX + b$ le polynôme irréductible sur $\mathbb{R}$ de degré 2 dans la décomposition (D) de P et $R = X^2 + a'X + b' = (X - \alpha)(X - \beta)$ le produit des deux polynômes de degré 1 dans la décomposition (D).

3) En utilisant le fait que $QR = P$, montrer que
   (a) $a = \alpha + \beta$,
   (b) b et b' sont racines de $X^2 - a^2X - 1$,
   (c) $b - b' = \sqrt{a^4 + 4}$,
   (d) $a\sqrt{a^4 + 4} = 1$.

4) Montrer que a^2 est racine de $X^3 + 4X - 1$.

5) En déduire que a^2 n'est pas constructible et donc que a non plus.

6) En déduire que P contient au moins une racine réelle non-constructible.

7) En déduire que P est irréductible.

8) Expliquer en quoi cela donne un contre-exemple à la réciproque du résultat de Wantzel.

Remarque. On peut montrer qu'un nombre complexe z est constructible si et seulement si le corps de décomposition du polynôme minimal de z sur $\mathbb{Q}$ est une extension de $\mathbb{Q}$ de degrée une puissance de 2. Ce résultat utilise la notion de groupe de Galois. On pourra voir [Elk02, Section XI.4] pour plus de détails.

2. Indice : on pourra montrer par récurrence que $K_i \subseteq \mathscr{C}$.
3. Indice : on pourra étudier les variations de la fonction polynomial donnée par P.

3 Constructions impossibles à la règle et au compas

Exercice 6 – La quadrature du cercle
On rappelle que π est un nombre transcendant (i.e. π n'est pas algébrique sur $\mathbb{Q}$).

En déduire que la quadrature du cercle, *"construire, à la règle et au compas, un carré de même aire que le cercle unité"*, est impossible.

Exercice 7 – La duplication du cube

1) Montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible.

2) En déduire que la duplication du cube, *"construire, à la règle et au compas, le côté d'un cube de volume le double du cube unité"*, est impossible.

Exercice 8 – La trisection de l'angle
On dit qu'un angle $\alpha \in [0,\, 2\pi[$ est *trisectable* (à la règle et au compas) si $\mathrm{e}^{i\frac{\alpha}{3}}$ est constructible à partir de $\{0, 1, \mathrm{e}^{i\alpha}\}$.

1) Montrer que $\frac{\pi}{2}$ et π sont trisectables.

2) Montrer que pour tout $n > 0$, $\frac{\pi}{2^n}$ est trisectable.

3) Calculer le degré du polynôme cyclotomique $\Phi_9(X)$.

4) En déduire que $\frac{\pi}{3}$ n'est pas trisectable.

Exercice 9 – Un peu plus sur les angles trisectables
Soit $\alpha \in [0,\, 2\pi[$.

1) Montrer que $\cos(\frac{\alpha}{3})$ est racine de $4X^3 - 3X - \cos\alpha$.

2) Montrer que α est trisectable si et seulement si $\cos(\frac{\alpha}{3})$ est constructible à partir de $\{0, 1, \cos\alpha\}$

3) Montrer que α est trisectable si et seulement si $4X^3 - 3X - \cos\alpha$ est réductible sur $\mathbb{Q}(\cos\alpha)$.

4) *Application :* montrer que $4X^3 - 3X - \frac{\sqrt{2}}{2}$ est réductible sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

4 Polygones constructibles à la règle et au compas

On dit que le polygone régulier à n côtés est constructible si $\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$ est constructible.

Définition 2. Un nombre premier p est un *nombre premier de Fermat* si $p - 1$ est une puissance de 2.

Exercice 10 – Quelques exemples

1) Montrer que le triangle équilatéral est constructible.

2) Montrer que le carré est constructible.

3) Montrer que le polygone à 18 côtés n'est pas constructible.

4) Montrer que le polygone régulier à 2^k côtés est constructible pour tout $k \geq 1$.

5) Montrer que le polygone régulier à p^k côtés avec p premier et $k \geq 1$ est constructible si et seulement si $k = 1$ et p est un nombre premier de Fermat.

Exercice 11 – Le Théorème de Gauss

1) Montrer que si m et n sont premiers entre eux alors le polygone à mn côtés est constructible si et seulement si les polygones à n et m côtés sont constructibles.

2) Montrer que le polygone à n côtés est constructible si est seulement $n = 2^r p_1 p_2 \cdots, p_l$ avec $p_1, p_2, \ldots, p_l$ des nombres premiers de Fermat distincts.

Références

[Car01] Jean-Claude Carrega. *Théorie des corps*. Hermann, 2001.

[Elk02] Renée Elkik. *Cours d'algèbre*. Elipses, 2002.