Examen

Calculatrices ainsi que deux feuilles A4 recto verso manuscrites. La qualité de la rédaction et de l'argumentation sera prise en compte dans la notation. ***Attention, aucun point ne sera donné pour une réponse sans détail de calcul ou justification.*** *Le barème est indicatif et susceptible d'évoluer.*

Exercice 1 (Complexes – 1 pts)
Trouver, en détaillant les calculs, toutes les solutions complexes de l'équation $z^2 - 2z + (1-i) = 0$.

Exercice 2 (Linéarisation – 1 pts)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser, en détaillant les calculs, $(\sin(\theta))^5$.

Exercice 3 (Matrices – 2 pts)

1. Inverser, en détaillant les calculs, la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer, en détaillant les calculs, le determinant suivant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Exercice 4 (Sous-espaces vectoriels – 1 pts)
Pour chacun des deux ensembles suivants, dire en le justifiant si c'est une sous-espace de $\mathbb{R}^3$ et si oui, en donner une base et sa dimension.

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 1\} \qquad \text{et} \qquad F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \text{ et } 2x + y + z = 0\}.$$

Exercice 5 (Une applications linéaires – 4 pts)
Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $f\colon E \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application linéaire défine pour tout $P \in E$ par

$$f(P) = XP' - XP^{(2)}(0).$$

1. Calculer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ en donnant une base et la dimension.
2. Donner la matrice de f dans la base $(1, X, X^2)$.
3. Justifier que $(1, 1+X, 1+X+X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner la matrice de f sans cette base.

Exercice 6 (Diagonalisation – 4 pts)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer, en détaillant les calculs, le polynôme caractéristique χ_A de A.
2. Montrer que les valeurs propres de A sont -1 et 2 et donner la multiplicité de chacune.
3. Donner, en le justifiant, une base pour chacun des espaces propres de A.
4. En déduire que A est diagonalisable et donner une matrice de changement de base P et une matrice diagonale D telle que $P^{-1}AP = D$.

Exercice 7 (Primitives et intégrales – 2 pts)

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x)\ln\left[1+\cos(x)\right] dx$.
2. Calculer $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln(x) dx$.

Exercice 8 (Fractions rationnelles – 2 pts)

En détaillant les calculs, déterminer partie entière et décomposition en éléments simples des fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$
2. $\dfrac{2x^2+2x+5}{x^2-3x+2}$

Exercice 9 (Equations différentielles – 2pts)

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'(t) - 2ty(t) = -(2t-1)e^t$.
2. $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t+1)e^{-t}$.

Exercice 10 (Surprise !)