Année 2022-2023 Polytech Grenoble, $3^{\text{ième}}$ année
TC Maths S6 Filières, GGC, MAT et PRI

TD n° 1 Séries de Fourier

Exercice 1.
On considère la fonction paire et 2π-periodique définie sur $[0, \pi]$ par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \pi/2] \\ -1 & \text{si } t \in]\pi/2, \pi] \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier réels de f.
3. En déduire que pour tout $t \in [0, \pi/2[$,

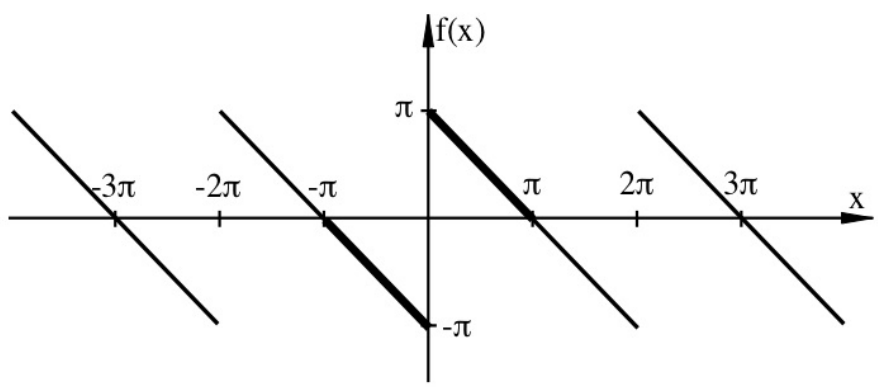
$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\cos((2k+1)t)}{2k+1} = 1.$$

   On prendra soins de bien enoncer le théorème qu'on utilise.
4. Calculer les séries suivantes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

   On prendra soins de bien énoncer le théorème qu'on utilise.

Exercice 2.
On considère la fonction f représentée par le graphe suivant (on suppose que $f(0) = \pi$) :



1. Vérifier que f satisfait les conditions du théorème de Dirichlet.
2. Calculer la série de Fourier S_f de f.
3. Exprimer, quand c'est possible, $f(x)$ sous forme de série de Fourier.
4. Appliquer le théorème de Parseval.

Exercice 3.

Soit f la fonction $2\pi-$périodique, définie pour $x \in [0, 2\pi[$ par $f(x) = x^2$.

1. Déterminer la série de Fourier de f.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, puis $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 4.

1. En utilisant le théorème de Parseval, prouver que deux fonctions continues 2π-périodiques ayant les mêmes coefficients de Fourier sont égales.
2. Soit f la fonction créneau définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \pi[$, $f(x) = -1$ si $x \in [-\pi, 0[$, et prolongée par 2π-périodicité. Quelle est la régularité de cette fonction ? Que dire de la série de Fourier de f en 0 ?
3. Soit f la fonction paire 2π-périodique définie par $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, \pi]$. La fonction f est-elle C^1 par morceaux ?

TD n$^{\text{o}}$ 2 Transformée de Fourier

Exercice 1.

Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes. Pour la première, faire le calcul de deux manières différentes : par le calcul direct puis en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier et la formule donnée en cours pour $\widehat{\Pi}$.

$$\Pi_{[-3,5]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-3,5] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad f(t) = \begin{cases} e^{3t} & \text{si } t < 0 \\ e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \text{ ou } t > 1 \\ t & \text{si } t \in [0,\, 1] \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{si } t \in [-\pi/2,\, \pi/2[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2.
À l'aide de la transformée de Fourier de la fonction porte Π, calculer l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x^2} dx$$

En déduire l'intégrale :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x^2} dx$$

Exercice 3.
On note Λ la fonction triangle définie par

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si} \quad |t| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Faire la représentation graphique de la fonction Λ.
2. Calculer la transformée de Fourier de la fonction Λ.
3. En déduire la valeur de l'intégrale :
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^4(\pi x)}{\pi^4 x^4} dx$$

Exercice 4.

On pose $f(x) = e^{-2\pi|x|}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de f.
2. À l'aide du théorème d'inversion, en déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. Déterminer la transformée de Fourier de $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 5. On considère une tige homogène très mince de longueur infinie. La température de la tige au temps $t \geq 0$ au point d'abscisse $x \in \mathbb{R}$ est notée $u(t,x)$. On suppose que cette fonction vérifie l'équation suivante, appelée équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

On suppose dans la suite que u_0 est intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. On considère que pour tout temps t, la fonction $x \mapsto u(t,x)$ est intégrable. On pose $y \mapsto \hat{u}(t,y)$ sa transformée de Fourier. Montrer que $\hat{u}$ vérifie l'équation :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,y) + 4\pi^2 y^2 \hat{u}(t,y) = 0$$

2. En déduire que $\hat{u}(t,y) = \hat{u}_0(y)e^{-4\pi^2 y^2 t}$.
3. On pose $g(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right)$, on admet que $\hat{g}(t,y) = e^{-4\pi^2 y^2 t}$. Donner alors une solution de l'équation de la chaleur.

TD n^o 3 Probabilités

Exercice 1. Dans une entreprise, deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier 1 fabrique en une journée deux fois plus de pièces que l'atelier 2. Le pourcentage de pièces défectueuses est 3% pour l'atelier 1 et 4% pour l'atelier 2. On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée. Déterminer :

1. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 ;
2. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 et est défectueuse ;
3. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 sachant qu'elle est défectueuse.

Exercice 2. Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de clés USB. 5% des boites sont abîmées. Le gérant estime que :

— 60% des boites abîmées contiennent au moins une clé défectueuse.
— 98% des boites non abîmées ne contiennent aucune clé défectueuse.

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : “la boite est abîmée” et par D l'événement “la boite achetée contient au moins une clé défectueuse”.

1. Donner les probabilités de $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P(D|A)$, $P(D|\bar{A})$, $P(\bar{D}|A)$ et $P(\bar{D}|\bar{A})$. En déduire la probabilité de D.
2. Le client constate qu'un des clés achetées est défectueuse. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abîmée ?

Exercice 3. L'examen du code de la route se compose de 40 questions. Pour chaque question, on a le choix entre 4 réponses possibles. Une seule de ces réponses est correcte. Un candidat se présente à l'examen. Il arrive qu'il connaisse la réponse à certaines questions. Il répond alors à coup sûr. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard entre les 4 réponses proposées. On suppose toutes les questions indépendantes et que pour chacune de ces questions, la probabilité que le candidat connaisse la vraie réponse est p. On note, pour $1 \leq i \leq 40$, A_i l'événement : "le candidat donne la bonne réponse à la i-ème question". On note S la variable aléatoire égale au nombre total de bonnes réponses.

1. Calculer $P(A_i)$.
2. Quelle est la loi de S (justifier !) ?
3. A quelle condition sur p le candidat donnera en moyenne au moins 36 bonnes réponses ?

Exercice 4. On étudie le flux de véhicules durant une tranche horaire donnée au raccordement de deux routes A et B vers une route à sens unique C. On note X (respectivement Y), le nombre de véhicules allant de A vers C (respectivement de B vers C). Il y a donc $S = X + Y$ véhicules empruntant C après le raccordement.

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ.

1. Déterminer la loi de S.
2. Soit n un entier. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $S = n$.

Exercice 5. On suppose que la durée de vie d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre $0,1$.

1. Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie.
2. Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 12 ans de durée de vie sachant qu'elle a déjà duré 10 ans.
3. Comparer ce résultat à la probabilité qu'une voiture dépasse 2 ans de durée de vie.
4. La loi exponentielle vous paraît-elle bien adaptée pour modéliser la durée de vie d'une voiture ?

Exercice 6. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Démontrer que la variable aléatoire $X = -\ln U$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Exercice 7. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. On pose $Y = \min(X_1, X_2)$.

1. Pour tout réel y, calculer $\mathbb{P}(Y > y)$. En déduire que Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
2. Deux guichets sont ouverts à une banque. Le temps de service au premier guichet (resp. au deuxième) suit une loi exponentielle de moyenne 20 min (resp. 30 min). Deux clients rentrent simultanément, l'un choisit le guichet 1 et l'autre le guichet 2. En moyenne, après combien de temps sort le premier ?
3. En moyenne, après combien de temps sort le dernier ?

Exercice 8. La taille d'un homme âgé de 25 ans suit une loi normale de moyenne 175cm et d'écart-type 6cm.

1. Quel est le pourcentage d'hommes ayant une taille supérieure à 1m85 ?
2. Parmi les hommes mesurant plus de 1m80, quelle proportion mesure plus de 1m92 ?

Exercice 9.

1. Lecture directe : soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer $t > 0$ tel que $P(-t < X < t) \simeq 0,95$.
2. Renormalisation : soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(8,4)$. Donner des valeurs approchées pour
$$P(X < 7,5),\ P(X > 8,5),\ P(6,5 < X < 10),\ P(X > 6|X > 5).$$
3. Lecture inverse : Soit X une variable aléatoire suivant une loi gaussienne. Déterminer l'espérance et la variance de X sachant que
$$\begin{cases} P(X < -1) & \simeq & 0,05 \\ P(X > 3) & \simeq & 0,12. \end{cases}$$

Exercice 10. La capacité des ascenseurs est déterminée par le fait que la masse d'une personne suit une loi normale de moyenne 75 kg et d'écart-type 5 kg. Dans un ascenseur du type WH1 le nombre maximum de personnes est de 9. Un voyant lumineux affiche qu'il y a surpoids pour une masse supérieure à 700 kg, dans ce cas l'ascenseur ne démarre pas.

1. Calculer la probabilité qu'il y ait surpoids, quand un groupe de 9 personnes monte dans l'ascenseur.
2. Une enquête récente a montré qu'aux USA, le poids moyen est de 76 kg et l'écart-type de 6 kg. Le building de la World-Company, à New York, est équipé d'un ascenseur du type WH1. Calculer la probabilité qu'il y ait surpoids, quand un groupe de 9 personnes monte dans cet ascenseur.

Exercice 11. Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès, qui dessert 5000 abonnés. A instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.

1. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant t. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance, son écart-type ?
2. On pose $Y = \frac{X-1000}{\sqrt{800}}$. Justifier précisément qu'on peut approcher la loi de Y par la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
3. Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à $2,5\%$. En utilisant l'approximation précédente, proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions.

TD n$^{\text{o}}$ 4 Calcul Différentiel

Exercice 1.

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Montrer que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.
2. Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   g est-elle continue partout sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2.
Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^1.
2. Donner l'équation du plan tangent au graphe de f en $(1;-1)$.

Exercice 3.

1. Préciser les domaines de définition, et calculer le gradient des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \cos\left(xy^2\right), \qquad g(x,y) = \exp\left(\frac{1}{x^2-y+2}\right) \qquad \text{et} \qquad h(x,y,z) = xy^2 - yz^2$$

2. Déterminer Div f où f est le champ de vecteurs suivant : $f(x,y,z) = (2x^2y, 2xy^2, xy)$.
3. Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction $f(x,y) = \cos(xy^2)$.

Exercice 4.
Determiner les extrema locaux des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Exercice 5.
Montrer que le champs suivant dérive d'un potentiel scalaire, et déterminer tous les potentiels scalaires dont il dérive :

$$F(x,y,z) = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2)$$