# Remise à niveau IESE3

Rémi Molinier

8 septembre 2022

## Table des matières

# 1 Trigonométrie, produits scalaire et vectoriel

## 1.1 Cercle et fonctions trigonométriques

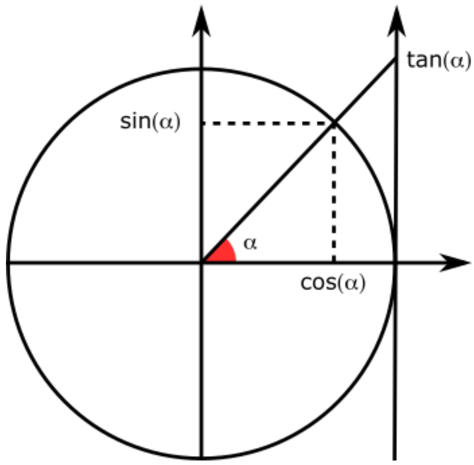


FIGURE 1 – Fonctions trigonométriques

**Exercice 1.1.** *Remplir le tableau suivant et représenter les sur un cercle trigonométrique.*

| **Angle** $\alpha$ | **cos**$(\alpha)$ | **sin**$(\alpha)$ | **tan**$(\alpha)$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | | | |
| $\frac{\pi}{6}$ | | | |
| $\frac{\pi}{4}$ | | | |
| $\frac{\pi}{3}$ | | | |
| $\frac{\pi}{2}$ | | | |
| $\frac{2\pi}{3}$ | | | |
| $\frac{3\pi}{4}$ | | | |
| $\frac{5\pi}{6}$ | | | |
| $\pi$ | | | |

**Exercice 1.2.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner les liens entre les* cos, sin *et* tan *des angles suivants et illustrer les sur un cercle trigonométrique.*

1. $\alpha$ *et* $-\alpha$.
2. $\alpha$ *et* $\pi - \alpha$.
3. $\alpha$ *et* $\pi + \alpha$.
4. $\alpha$ *et* $\frac{\pi}{2} - \alpha$.
5. $\alpha$ *et* $\frac{\pi}{2} + \alpha$.

**Exercice 1.3** (Formules de trigonométrie). *Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Compléter les formules de trigonométrie suivantes.*

1. $\cos(\alpha+\beta) =$
2. $\sin(\alpha+\beta) =$
3. $\cos(\alpha-\beta) =$
4. $\sin(\alpha-\beta) =$
5. $\cos(2\alpha) =$
6. $\sin(2\alpha) =$
7. $\cos^2(\alpha) =$
8. $\sin^2(\alpha) =$
9. $\cos(\alpha)\cos(\beta) =$
10. $\cos(\alpha)\sin(\beta) =$
11. $\sin(\alpha)\sin(\beta) =$

**Exercice 1.4.** *Pour chacune des fonctions trigonométriques* cos, sin *et* tan, *Donner le domaine de définition, la parité, la périodicité, la dérivée et tracer l'allure du graphe de la fonction avec les tangentes remarquables.*

## 1.2 Produit scalaire en dimension 2

**Définition 1.1.** Soient $u_1 = (x_1, y_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On définit le **produit scalaire** de $u_1$ et $u_2$ par

$$u_1 \cdot u_2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

**Exercice 1.5** (Un exemple). *Soient $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (1, -2)$. Calculer le produit scalaire de $u_1$ et $u_2$.*

**Exercice 1.6** (Propriétés algébriques). *Soient $u_1$, $u_2$ et $u_3$ trois vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *Est-ce $u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_1$ ? (on parle de **commutativité**)*
2. *Développer $u_1 \cdot (u_2 + \lambda u_3)$. (on parle de **linéarité à droite**)*
3. *Deviner ce qu'on entend par "le produit scalaire est linéaire à gauche".*
4. *Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Le produit scalaire à aussi un interprétation en terme d'angle et de normes :

$$u_1 \cdot u_2 = \|u_1\| \times \|u_2\| \times \cos(\alpha)$$

où $\alpha = (u_1, u_2)$ est l'angle orienté entre $u_1$ et $u_2$.

**Exercice 1.7** (Interprétation géométrique). *Soient $u_1$, $u_2$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.*

1. *À quoi correspond géométriquement $\sqrt{u_1 \cdot u_1}$ ?*
2. *Quel est le liens entre produit scalaire et orthogonalité ?*
3. *Quel est le liens entre produit scalaire et projection ?*

**Exercice 1.8** (Un autre exemple). *Soient $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (1, 0)$. Calculer le produit scalaire de $u_1$ et $u_2$ de deux façons différentes.*

**Exercice 1.9** (Produit scalaires et droites). *Soient $\mathcal{D}$ la droite d'équation $3x + 2y = 0$. Trouver un vecteur unitaire normal à la droite $\mathcal{D}$.*

**Exercice 1.10** (un calcul d'angle). *Soient $u = (2\sqrt{3}, -1)$ et $v = (-\sqrt{3}, -1)$. Calculer l'angle orienté de $u$ à $v$.*

## 1.3 Produits scalaire et vectoriel en dimension 3

**Définition 1.2.** Soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On définit le **produit scalaire** de $u_1$ et $u_2$ par

$$u_1 \cdot u_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

**Exercice 1.11** (Un exemple). *Soient $u_1 = (1, 1, -1)$ et $u_2 = (1, -2, 1)$. Calculer le produit scalaire de $u_1$ et $u_2$.*

**Exercice 1.12** (Propriétés algébriques et interprétation géométrique). *Donner l'interprétation en termes d'angle et de normes et refaire les exercices 1.6 et 1.7 pour la dimension 3.*

**Exercice 1.13** (Produit scalaire et plans). *Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x - y + 2z = 0$. Trouver un vecteur unitaire normal à $\mathcal{P}$.*

**Définition 1.3.** Soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On définit le **produit vectoriel** de $u_1$ et $u_2$ comme le vecteur de $\mathbb{R}^3$

$$u_1 \wedge u_2 = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2).$$

**Exercice 1.14.** *Donner un représentation mnémotechnique du calcul du produit vectoriel.* [1]

**Exercice 1.15** (Un exemple basique)**.** *Soient* $u_1 = (1, 0, 0)$ *et* $u_2 = (0, 1, 0)$. *Calculer le produit vectoriel* $u_1 \wedge u_2$.

**Exercice 1.16** (Un autre exemple)**.** *Soient* $u_1 = (1, 1, -1)$ *et* $u_2 = (1, -2, 1)$. *Calculer le produit vectoriel* $u_1 \wedge u_2$.

**Exercice 1.17** (Propriétés algébriques)**.** *Soient* $u_1$, $u_2$ *et* $u_3$ *trois vecteurs et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. *Quel est le liens entre* $u_1 \wedge u_2$ *et* $u_2 \wedge u_1$ *? (on parle d'**antisymétrie**)*
2. *Développer* $u_1 \wedge (u_2 + \lambda u_3)$.

**Exercice 1.18** (Interprétation géométrique)**.** *Soient* $u_1$ *et* $u_2$ *deux vecteurs.*

1. *Que représente géométriquement le produit vectoriel ?*
2. *Quel est la norme de* $u_1 \wedge u_2$ *en fonction des normes de* $u_1$ *et* $u_2$ *?*
3. *Que signifie* $u_1 \wedge u_2 = 0$ *?*

**Exercice 1.19** (Produit vectoriel et plans)**.** *Soit* $\mathcal{P}$ *le plan engendré par les vecteur* $(1, 0, 1)$ *et* $(1, -1, 0)$. *Trouver un vecteur unitaire normal à* $\mathcal{P}$.

1. Voir ici par exemple

# 2 Nombres complexes

## 2.1 Forme algébrique

Rappelons qu'il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés **nombres complexes**, tels que :

- ✦ $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;
- ✦ $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles dans l'ensemble $\mathbb{R}$ ;
- ✦ $\mathbb{C}$ contient un élément $i$ tel que $i^2 = -1$ ;
- ✦ tout nombre complexe $z$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$ où $a$ et $b$ sont deux réels. Cette écriture est appelée la **forme algébrique** de $z$.
  - ✧ On dit que le réel $a$ est la **partie réelle** de $z$ et on la note $a = \mathrm{Re}(z)$.
  - ✧ On dit que $b$ est **la partie imaginaire** [2] de $z$ et on la note $b = \mathrm{Im}(z)$.
  - ✧ Tout nombre complexe de la forme $z = ib$ ($b$ réel) est appelé **imaginaire pur**.

**Proposition 2.1.** *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :*

$$a + bi = a' + b'i \Longleftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'.$$

*En particulier :*

$$a + bi = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$$

**Exercice 2.1.** *Soit $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$. mettre sous forme algébrique les complexes suivants (quand ceux-ci sont définit).*

$$z_1 + z_2, \qquad z_1 z_2 \qquad \text{et} \qquad \frac{z_1}{z_2}.$$

Pour le dernier complexe dans l'exercice précédent, la notion suivante peut avoir son utilité.

**Définition 2.1.** Soit $z = a + ib$ un complexe. Le **conjugué** de $z$ est le complexe $\bar{z} = a - ib$.

**Exercice 2.2** (Propriétés de la conjugaison complexe)**.** *Soit $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes. Simplifier les expressions suivantes.*

$$\overline{z_1 + z_2}, \qquad \overline{z_1 z_2} \qquad \text{et} \qquad \overline{z_1 / z_2}.$$

**Exercice 2.3.** *soit $z$ un nombre complexe. Interpréter les relations suivantes en termes de propriétés de $z$.*

1. $z = \overline{z}$.
2. $z + \overline{z} = 0$.

Les identités remarquables que vous connaissez marchent aussi avec les nombres complexes. On peut cependant rajouter la suivante :

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Une autre identité que vous ne connaissez peut être pas mais qui est très importante :

**Proposition 2.2** (Binôme de Newton)**.** *Soient $z_1$ et $z_2$ deux complexes. pour tout entier $n$,*

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}.$$

**Exercice 2.4.** *Développer l'expression suivante $(a + b)^7$.*

Pour finir, voici quelques exercices d'entrainement de manipulation de formes algébriques de nombres complexes.

**Exercice 2.5.** *Mettre les nombres complexes suivant sous forme algébrique*

$$\frac{3 + 6i}{3 - 4i}, \qquad -\frac{2}{1 - i\sqrt{3}} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{(1 + 2i)(3 - i)}$$

2. Bien remarquer que la partie imaginaire d'un complexe est un *réel*

## 2.2 Interprétation géométrique, module et argument

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ :
À tout complexe $z = a + bi$ avec $a$ et $b$ réels, on associe le point $M(a; b)$ et le vecteur $\vec{w}$ $(a; b)$ appelés point d'affixe et vecteur d'affixe $z$.
Soit $z$ un nombre complexe et $M$ le point d'affixe $z$ dans le plan complexe.
Le **module** de $z$, noté $|z|$, est la distance $OM$ : $|z| = OM$ .
Si $z$ est non nul, on appelle **argument** de $z$, noté $\arg(z)$, toute mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ : $\arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) \pmod{2\pi}$.

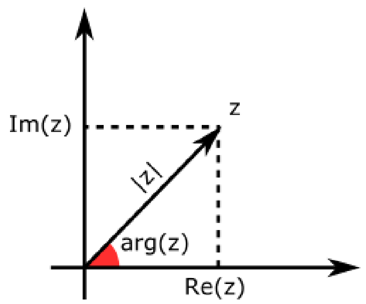


FIGURE 2 – Module et argument

Dans la suite on identifiera $z$ avec le point d'affixe $z$.

**Exercice 2.6.** *Soit $z$ un nombre complexe.*

1. *À quelles conditions sur le module et/ou l'argument $z$ est-il un réel ?*
2. *À quelles conditions sur le module et/ou l'argument $z$ est-il un imaginaire pur ?*
3. *Exprimer le module et l'argument de $-z$, $\overline{z}$ et $-\overline{z}$ en fonction du module et de l'argument de $z$ (on pourra faire un dessin !).*

On peut alors exprimer un complexe grâce au module et à l'argument de la façon suivante.

**Proposition 2.3.** *Soit $z$ un complexe* non nul. *Il existe un réel $r > 0$ et un réel $\theta$ tels que*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \textit{avec} \qquad r = |z| \ \textit{ et } \ \theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$$

Si $z = a + bi$, avec $z \neq 0$, alors $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\theta$ tel que $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Enfin, voici quelques propriétés du module et de l'argument.

**Proposition 2.4.** **[Inégalité triangulaire]** *Soient $z$ et $z'$ deux complexes. On a*

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

**Proposition 2.5.** *Soient $z$ et $z'$ deux complexes non nuls. On a*

- ✦ $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- ✦ $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$
- ✦ *Pour tout entier $n$,* $|z^n| = |z|^n$ *et* $\arg(z^n) = n\arg(z) \pmod{2\pi}$
- ✦ $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ *et* $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$.
- ✦ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ *et* $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$.

**Exercice 2.7.** *Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.*

**Exercice 2.8** (Faire de la géométrie avec des complexes)**.** *Soit $z_1$ et $z_2$ deux complexes.*

1. *Comment calculer la distance entre les deux points d'affixes $z_1$ et $z_2$ ?*
2. *Comment calculer l'angle entre les deux vecteurs d'affixes $z_1$ et $z_2$ ?*
3. *Comment calculer le produit scalaire entre les deux vecteurs d'affixes $z_1$ et $z_2$ ?*

**Exercice 2.9** (en pratique)**.** *Soient $z_1 = \sqrt{3} - 3i$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i$.*

1. *Calculer la distance entre $z_1$ et $z_2$.*
2. *Calculer l'angle entre les vecteurs d'affixes $z_1$ et $z_2$.*

### 2.2.1 Notation exponentielle et applications

Si $z$ est un complexe de module 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Notant $f$ la fonction qui à tout réel $\theta$ associe le nombre complexe $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$, on vérifie que $f(\theta+\theta') = f(\theta)f(\theta')$ et $f(0) = 1$. On note alors

$$f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

**Définition 2.2.** Tout nombre complexe *non nul* de module $r$ et d'argument $\theta$ s'écrit sous la forme suivante, dite notation exponentielle :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{avec} \quad r = |z| \quad \text{et } \theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$$

On a alors les relations suivantes.

**Proposition 2.6** (Formules d'Euler)**.** *Pour tout réel $\theta$ on a*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \textit{et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

**Exercice 2.10** (Retour sur les formules de trigo)**.** *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En considérant $e^{i(\alpha+\beta)}$ retrouver la formule de trigonométrie $\cos(\alpha+\beta) = \cdots$.*

**Exercice 2.11** (Application des formules d'Euler : linéarisation)**.** *linéariser $\cos(\theta)^3$ and $\sin(\theta)^3$.*

**Exercice 2.12** (Technique de l'argument moitié)**.**

1. *Déterminer module et argument de $e^{i\theta}+1$ et de $e^{i\theta}-1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.*
2. *Donner le module et l'argument de $e^{i\pi/3} - e^{-2i\pi/3}$.*

**Exercice 2.13** (Racine de l'unité)**.**

1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.*
2. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -1$.*
3. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$.*
4. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 = -1$.*

## 2.3 Équation du second degré

Soient $a$, $b$ et $c$ des complexes avec $a \neq 0$. Comme

$$\begin{aligned} aX^2 + bX + c &= a\left(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left((X + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left((X + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

résoudre l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ revient à chercher un complexe $\delta$ tel que $\delta^2 = b^2 - 4ac$. On obtient alors

$$X = \frac{-b \pm \delta}{2a}.$$

**Exercice 2.14.** *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :*

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - \sqrt{3}z - i = 0 \quad ;$$

$$z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0 \;;\; z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0 \;;\; 4z^2 - 2z + 1 = 0 \;;$$

$$z^4 + 10z^2 + 169 = 0 \quad ; \quad z^4 + 2z^2 + 4 = 0.$$

# 3 Dérivées et développements limités

## 3.1 Dérivées

Dans ce cours, nous ne nous intéresserons qu'aux aspects calculatoires des dérivées et leurs interprétations géométriques.

**Exercice 3.1.** *Rappeler l'interprétation graphique de la dérivée et donner pour une fonction $f$ l'équation de la tangente en $x_0$ en fonction de $x_0$, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.*

**Exercice 3.2.** *Remplir le tableau suivant avec les domaines des fonctions indiquées, leurs dérivées et le domaine de dérivabilité.*

| **Fonction f** | **Domaine $\mathbf{D_f}$** | **Dérivée $\mathbf{f'}$** | **Domaine $\mathbf{D_{f'}}$** |
|---|---|---|---|
| $x^n$, $n \in \mathbf{N}$ | | | |
| $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$, $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ | | | |
| $x^\alpha$, $\alpha \in ]0, +\infty[$ | | | |
| $e^x$ | | | |
| $\ln \lvert x \rvert$ | | | |
| $\cos x$ | | | |
| $\sin x$ | | | |
| $\tan x$ | | | |

**Exercice 3.3.** *Pour les fonctions suivantes, donner l'équation de la tangente au point $x_0$ indiqué.*

1. $x \mapsto 3x + 2$ *en* $x_0 = 1$.
2. $x \mapsto x^3$ *en* $x_0 = 1$.
3. $\cos$ *en* $x_0 = \pi/2$ *et* $x_0 = \pi/3$.

**Exercice 3.4.** *Remplir le tableau suivant avec les formules de dérivabilité des composées usuelles ou $u$ et $v$ sont des fonctions dérivables.*

| **Fonction** | **Forme de la dérivée** |
|---|---|
| $u + v$ | |
| $\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}$ | |
| $uv$ | |
| $\frac{u}{v}$ | |
| $u^n, n \in \mathbb{N}$ | |
| $\cos(u)$ | |
| $\sin(u)$ | |
| $\tan(u)$ | |
| $\ln(u)$ | |
| $e^u$ | |

Plus généralement, on a la formule suivante pour les composées de fonctions

$$(u \circ v)' = v'\,(u' \circ v) \qquad (1)$$

**Exercice 3.5** (Application de la formule de composition)**.** *Utiliser la formule* (1) *pour retrouver les formules des dérivées de* $u^n$, $\cos(u)$, $\sin(u)$, $tan(u)$, $\ln(u)$ *et* $e^u$*.*

**Exercice 3.6.** *Quel est la dérivée de la fonction* $x \mapsto e^{e^{e^x}}$

## 3.2 Études locales des fonctions

### 3.2.1 Relations de comparaison

**Exercice 3.7.** *Rappeler les définitions des relations de comparaison* $o$*,* $O$ *et* $\sim$*.*

**Exercice 3.8** (Relations classiques)**.** *Donner les relations de comparaison entre les deux expressions données au voisinage du point indiqué.*

1. $\sin(x)$ *et* $x$ *au voisinage de* $0$*.*
2. $\cos(x)$ *et* $x - \pi/2$ *en* $\pi/2$*.*
3. $x^n$ *et* $x^m$ *au voisinage de* $0$ *(on discutera suivant les valeurs de* $m$ *et* $n$*).*
4. $e^x$ *et* $x^n$ *en* $+\infty$*.*
5. $\ln(x)$ *et* $x^n$ *en* $+\infty$*.*

### 3.2.2 Développements limités

Si $f$ est dérivable en un point $x_0$, on a

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

ce qui nous permet de comparer $f$ à la fonction polynomiale du premier degré $f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ *au voisinage de* $x_0$. L'idée sous-jacente est de comparer des fonctions à des fonctions polynomiales. Autrement dit, un développement limité est une "approximation" en un point d'une fonction par une fonction polynomiale.

**Définition 3.1.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$. et $f$ une fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $f$ admet un **développement limité** (DL) à l'ordre $n$ en $a$ s'il existe $P$ un polynôme de degré au plus $n$ et $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in I$

$$f(a + h) = P(h) + (h)^n \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On peut également écrire :

$$\begin{aligned}
&f(a + h) = P(h) + \mathrm{o}(h^n) \\
&f(x) = P(x - a) + (x - a)^n \varepsilon((x - a))\text{avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0. \\
&f(x) = P(x - a) + \mathrm{o}((x - a)^n)
\end{aligned}$$

**Exercice 3.9.** *Montrer que pour tout* $n \geq 1$*,* $(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}$*. En déduire qu'au voisinage de 0,*

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 \cdots + x^n + o(x^n)$$

L'existence d'un développement limité est une propriété *locale*. L'approximation obtenue est d'autant plus précise que l'ordre du développement est élevé. D'ailleurs celui-ci est unique !

**Théorème 3.1** (Taylor-Young)**.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $I$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$*,* $a$ *dans l'intérieur de* $I$*. Soit* $f$ *une fonction de* $I$ *dans* $\mathbb{R}$*,* $n$ *fois dérivable dans* $I$*. Alors admet un développement limité d'ordre* $n$ *donné par*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + o((x - a)^n)$$

**Exercice 3.10.** *Utiliser la formule de Taylor-Young pour déterminer les développements limités en 0 des fonctions cosinus, sinus, exponentiels et* $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ *avec* $\alpha > 0$*.*

**Exercice 3.11.** *Calculer le DL des fonctions suivantes*

1. $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$, *à l'ordre* $n$ *en 0 ;*
2. $x \mapsto \cos(x)e^x$, *à l'ordre* $5$ *en 0 ;*

**Exercice 3.12.** *On veut déterminer un développement limité de la fonction* $x \mapsto \cos(x)$ *au voisinage de* $\pi/3$.

1. *Exprimer* $\cos(\pi/3 + h)$ *en fonction de* $\cos(h)$ *et de* $\sin(h)$.
2. *Effectuer le développement limité en* $h$ *de l'expression trouvée à la question précédente.*
3. *En déduire le développement limité de* $\cos$ *au voisinage de* $\pi/3$.

**Exercice 3.13.** *Calculer les limites suivantes :*

$$1. \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \quad 2. \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \quad 3. \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}.$$

### 3.2.3 Opérations sur les développement limités

**Théorème 3.2** (Intégration de DL)**.** *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable,* $a \in I$ *et* $n \geq 0$. *Si au voisinage de* $a$ $f'$ *admet un DL d'ordre* $n$ *de la forme,*

$$f'(a+h) = P(h) + o(h^n)$$

*alors* $f$ *admet un développement limité d'ordre* $n+1$ *de la forme*

$$f(a+h) = Q(h) + o(h^n)$$

*avec* $Q$ *un polynôme tel que* $Q' = P$.

**Exercice 3.14.** *En utilisant le théorème précédent, donner la formule pour le DL en 0 de* $x \mapsto ln(1-x)$ *et* $x \mapsto ln(1+x)$.

**ATTENTION ! !** On peut intégrer des développement limité mais les choses ne se passe pas forcement bien quand on dérive ! Si $f$ est dérivable et admet un DL d'ordre $n$ en $a$, rien ne dit (et c'est en général faux) que $f'$ admette un DL d'ordre $n-1$ en $a$. Autrement dit on+ ne "dérive" pas un développement limité sans prendre de précautions. En fait, on peut dériver des DLs d'ordre $n+1$ **uniquement si l'on sait que la dérivée admet un DL d'ordre** $n$.

**Théorème 3.3** (Composées de DL)**.** *Soient* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *et* $g\colon J \to \mathbb{R}$ *deux fonctions telles que* $f(I) \subseteq J$. *On suppose que* $f$ *admet un DL d'ordre* $n$ *en* $a \in I$ *et* $g$ *admet un DL d'ordre* $n$ *en* $b = f(a)$. *Alors* $g \circ f$ *admet un DL d'ordre* $n$ *en* $a$ *obtenue en "composant" les deux DL.*

**Exercice 3.15.** *Donner le développement limité en* $0$ *de :*

1. $x \mapsto \ln(\cos(x))$, *à l'ordre* $4$ *;*
2. $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ *à l'ordre* $4$ *;*
3. $x \mapsto \tan(x)$, *à l'ordre* $4$ *;*
4. $x \mapsto \sin(\tan(x))$, *à l'ordre* $4$ *;*
5. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$, *à l'ordre* $4$ *;*
6. $x \mapsto \exp(\sin(x))$, *à l'ordre* $3$ *;*
7. $x \mapsto \sin^6(x)$, *à l'ordre* $9$.