MAT4111

Premier semestre — 2021–2022

Fiche 2: Compléments sur les anneaux (2ème partie)

Corps de fractions

1. *Sur la définition du corps de fractions.* Soient A un anneau commutatif intègre et L un corps contenant A tel que tout élément de L est de la forme as^{-1} avec $a \in A$ et $s \in A \setminus \{0\}$. Montrer que L est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Fr}(A)$.

2. *Exemples de corps de fractions.* Déterminer le corps des fractions des anneaux suivants : $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[1/2]$, $k[X^2, X^3]$ (où k est un corps) et $\{P \in \mathbb{Q}[X] : P(0) \in \mathbb{Z}\}$.

3. *Corps de fractions des séries formelles.* Soit k un corps.

(a) Montrer que le corps des fractions de $k[[X]]$ est

$$k((X)) = k[[X]][X^{-1}] = \left\{ \sum_{\ell \geq -m} c_\ell X^\ell \text{ pour quelque } m \in \mathbb{N} \right\}.$$

On appelle les éléments de $k((X))$ *séries formelles de Laurent*.

(b) Comparer $k(X)$ et $k((X))$. *Indication :* montrer que $\sum_{\ell \geq 0} X^{2^\ell}$ n'est pas rationnelle.

4. *Fractions rationnelles symétriques.* Soit k un corps et $n \geq 2$.

(a) Montrer que l'action de $\mathbb{S}_n$ sur $k[X_1, \dots, X_n]$ s'étend naturellement à une action par automorphismes de corps sur $k(X_1, \dots, X_n)$.

(b) Montrer que le sous-corps L des fractions rationnelles invariantes par $\mathbb{S}_n$ est égal au corps des fractions de $k[X_1, \dots, X_n]^{\mathbb{S}_n}$. *Indication :* si P/Q est symétrique, c'est-à-dire invariante par $\mathbb{S}_n$, poser $D = \prod_{\sigma \in \mathbb{S}_n} (\sigma \cdot Q)$.

⋆ **5.** *Décomposition en éléments simples de fractions rationnelles.* Soit k un corps.

(a) Soient $n \geq 1$ et $P/Q \in k(X)$ une forme irréductible non nulle avec $Q = \prod_{i=1}^n Q_i$ où les polynômes Q_i sont non constants deux à deux premiers entre eux. Montrer qu'il existe $P_1, \dots, P_n$ tels que $P/Q = \sum_{i=1}^n P_i/Q_i$ avec P_i et Q_i premiers entre eux pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

(b) Soient S et Q dans $k[X]$ avec $Q \neq 0$. Montrer qu'il existe $S_0, \dots, S_{n-1}$ et R_n des polynômes tels que $S = \sum_{j=0}^{n-1} S_j Q^j + R_n Q^n$ et $\deg S_\ell < \deg Q$ pour tout $0 \leq \ell \leq n-1$.

(c) En déduire que si $F \in k(X)$ s'écrit sous forme irréductible P/Q avec Q de factorisation en irréductibles distincts $Q = \prod_{i=1}^n Q_i^{\alpha_i}$ ($\alpha_i \in \mathbb{N}^*$), alors

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{i,j}}{Q_i^j} \text{ avec } E \in k[X] \text{ et } 0 \leq \deg P_{i,j} < \deg Q_i \text{ pour tout } i, j.$$

⋆ **6.** *Groupes* $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ *et* $\mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^*)^2$.

(a) Montrer que le groupe $(\mathbb{Q},+)$ n'a pas de partie génératrice finie.

(b) Donner un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ puis $\mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^*)^2$.

⋆ **7.** Résoudre dans $\mathbb{Q}^2$ l'équation $x^2+y^2=1$ en utilisant la paramétrisation du cercle unité privé de $(-1,0)$ par la pente des droites passant par $(-1,0)$. En déduire les solutions entières de l'équation $x^2+y^2=z^2$.

Anneaux noethériens

8. *Théorème de transfert de Hilbert et réciproque.*

(a) Soit A un anneau noethérien, montrer que $A[[X]]$ est noethérien. *Indication :* partant d'un idéal $I\neq\{0\}$ de $A[[X]]$, pour $n\in\mathbb{N}$, considérer

$$I_n=\left\{a\in A : \text{il existe } F\in I \text{ de la forme } aX^n+\sum_{\ell>n}c_\ell X^\ell\right\}.$$

(b) Soit A un anneau tel que $A[X]$ est noethérien. Est-ce que A est noethérien ?

9. *Exemples d'anneaux noethériens ou pas.* Les anneaux suivants sont-ils noethériens ? Le cas échéant donner une suite d'idéaux strictement croissante infinie et un idéal qui n'est pas de type fini.

(a) A/I avec A anneau noethérien et I idéal de A,

(b) B anneau tel qu'il existe $f:A\to B$ morphisme surjectif avec A noethérien,

(c) $k[X_i : i\in\mathbb{N}]=\cup_{n\in\mathbb{N}}k[X_1,\dots,X_n]$ des polynômes en une infinité de variables, où k est un corps,

(d) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ avec d entier non carré,

(e) l'anneau des suites à valeurs entières,

(f) l'anneau des séries entières complexes à rayon de convergence strictement positif,

(g) la sous-algèbre $k[XY^n : n\in\mathbb{N}]$ de $k[X,Y]$, où k est un corps.

10. *Anneau noethérien ou non (suite).*

(a) Soit F l'anneau des fonctions polynomiales $[-1,1]\to\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $\{f\in F : f(0)=0\}$ est un idéal de type fini de F.

(b) Soit $A=C^0([-1,1],\mathbb{R})$ et $I=\{f\in A : f(0)=0\}$.

(i) Montrer que I est un idéal maximal de A.

(ii) Montrer que I n'est pas de type fini. *Indication* : si $I=(f_1,\dots,f_n)$, considérer $g=|f_1|+\cdots+|f_n|$; si g ne s'annule qu'en 0, montrer que $f_i=o(g^{1/2})$ pour tout i.

(iii) En déduire que $A=C^0([-1,1],\mathbb{R})$ n'est pas noethérien, et donner une suite strictement croissante infinie d'idéaux.

⋆ **11.** *Anneau noethérien intègre.* Soit A un anneau commutatif intègre noethérien. Montrer que si $a\in A\setminus A^\times$, alors $\cap_{n\in\mathbb{N}^*}(a^n)=0$. Autrement dit, pour tout $b\in A\setminus\{0\}$, il existe un entier positif n tel que $a^n\nmid b$.