TD 2

Exercice 1 (droite numérique achevée) **(I)** On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, et $[a,+\infty) = (a,+\infty) \cup \{+\infty\}$, $(-\infty, b] = (-\infty, b) \cup \{-\infty\}$.

1) Montrer que $\mathcal{B} = \{(a,b) \,|\, a,b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,+\infty] \,|\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{[-\infty, b) \,|\, b \in \mathbb{R}\}$ est une base pour une topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$.

2) Avec la convention $\arctan(+\infty) = \pi/2$ et $\arctan(-\infty) = -\pi/2$, montrer que $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ définit une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$ et que l'application arctan est une isométrie bijective de $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$ muni de la distance usuelle.

3) Montrer que la topologie induite par la distance d coïncide avec la topologie engendrée par la base $\mathcal{B}$.

4) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $x_n \to \ell$ au sens habituel si et seulement si $x_n \to \ell$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, d)$.

5) Montrer que toute suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une sous-suite convergente dans $(\overline{\mathbb{R}}, d)$.

Exercice 2 (Distances sur l'espace des polynômes) **(I)** Si P et Q sont des polynômes à coefficients réels, on définit

$$d_0(P,Q) = \sup_{x\in[0,1/2]} |P(x) - Q(x)|,$$
$$d_1(P,Q) = \int_0^1 |P(x) - Q(x)| \mathrm{d}x,$$
$$d_2(P,Q) = \begin{cases} \deg(P-Q)+1 & \text{si } P \neq Q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Montrer que ce sont des distances sur l'espace $\mathbb{R}[X]$.

2) Quel est le comportement de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour chacune de ces distances ?

Exercice 3 Soit E un ensemble fini. Lorsque A et B sont deux parties de E, on note $A\Delta B$ leur différence symétrique, définie par $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, et on pose $d(A,B) = \mathrm{card}(A\Delta B)$. Montrer que d est une distance sur l'ensemble des parties de E.

Exercice 4 Soit (E,d) un espace métrique. Soit φ une application de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$, telle que :

(a) $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(b) φ est croissante,

(c) $\forall u,v \geq 0,\ \varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$ (on dit que φ est sous-additive).

1) Vérifier que l'application $\varphi(d) := \varphi \circ d$ est une distance sur E.

2) Montrer que toute fonction concave non nulle $\varphi : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ telle que $\varphi(0) = 0$ vérifie les conditions (a), (b) et (c) (pour ce dernier point, on pourra utiliser le fait que $u \mapsto \tau_{[0,u]}(\varphi) = \frac{\varphi(u)}{u}$ est décroissante). En déduire que $d/(1+d)$, $\min(1,d)$, $\ln(1+d)$, et d^α pour $0 < \alpha < 1$ sont des distances sur E.

3) On suppose que φ est continue en 0. Lorsque d est une distance sur E, on note pour $x \in E$ et $r > 0$, $B_d(x,r) = \{y \in E : d(x,y) < r\}$ la boule ouverte de centre x et de rayon r.

a) Montrer que pour tout $x \in E$ et $r > 0$, $B_{\varphi(d)}(x, \varphi(r)) \subset B_d(x,r)$.

b) Montrer que pour tout $x \in E$ et $r > 0$, il existe $r' > 0$ tel que $B_d(x,r') \subset B_{\varphi(d)}(x,r)$.

c) En déduire que les distances d et $\varphi(d)$ définissent les mêmes ouverts.

4) Lorsque φ n'est pas continue en 0, montrer que les boules pour la distance $\varphi(d)$ sont des singletons dès que le rayon est suffisamment petit.

Exercice 5 (Espace de suites) Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout f et g dans E, on note

$$d(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min(|g(k) - f(k)|, 1)$$

1) Montrer que cette formule définit une distance sur E, et que pour cette distance, E est borné.

2) Soit $K \in \mathbb{N}$. Montrer que :

a) si pour tout $k \in [0,K]$, $|g(k) - f(k)| \leq 2^{-K}$, alors $d(f,g) \leq 3 \times 2^{-K}$,

b) si $d(f,g) \leq 2^{-2K}$, alors pour tout $k \in [0,K]$, $|g(k) - f(k)| \leq 2^{-K}$.

3) Montrer que $d(f, f_n) \to 0$ si et seulement si (f_n) converge ponctuellement vers f.

4) Montrer que dans (E,d), toute suite de Cauchy converge. On dit que l'espace métrique (E,d) est complet.

5) Soit T l'application de E dans E définie par $T(f)(n) = f(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que T est lipschitzienne pour la distance d.

Exercice 6 (Plus courte distance entre deux parties d'un espace métrique) (I)

Soit (E,d) un espace métrique.

1) La formule $\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{d(a,b)\ ;\ (a,b) \in A \times B\}$ définit-elle une distance sur l'ensemble des parties non vides de E ?

2) Montrer que pour toutes parties A, B, C de E,

$$\mathrm{dist}(A,C) \leq \mathrm{dist}(A,B) + \mathrm{diam}(B) + \mathrm{dist}(B,C).$$

3) Trouver dans $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{eucl}})$ des parties F, G fermées telles que l'inf définissant $d(F,G)$ n'est pas atteint.

4) Trouver dans $(\mathbb{Q}^2, d_{\mathrm{eucl}})$ un exemple de partie F fermée, telle que $d(x,F)$ n'est pas atteinte pour un certain point x.

Exercice 7 (Distance SNCF) (I) On munit $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$. Pour tout x et y dans $\mathbb{R}^2$, on définit $D(x,y) = \|x - y\|$ si x et y sont colinéaires et $D(x,y) = \|x\| + \|y\|$ sinon.

1) Montrer que $D(x,y) \geq \|x - y\|$ pour tout x et y dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que D est une distance.

2) Décrire géométriquement la boule $B_D(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : D(x,y) < r\}$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^\star$ quelconques fixés.

Exercice 8 (Distance ultramétrique) Soit E un ensemble et $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

(i) $\forall (x,y) \in E \times E,\ d(x,y) = d(y,x)$

(ii) $\forall (x,y) \in E \times E,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $\forall (x,y,z) \in E^3,\ d(x,y) \leq \max(d(x,z), d(z,y))$

1) Montrer que d est une distance et que si $d(x,z) \neq d(z,y)$, (iii) est une égalité : dans E tous les triangles sont isocèles.

2) Montrer que si $r > 0$ et $x \in E$, pour tout $y \in B(x,r)$, $B(y,r) = B(x,r)$.

3) Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de E est de Cauchy si et seulement si la suite $(d(x_n, x_{n+1}))_{n\geq 0}$ tend vers 0.

4) Soit p un nombre premier. Pour tout entier non nul, on définit $\nu_p(n)$ comme étant l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. Si $x, y \in \mathbb{Z}$, on pose

$$d_p(x,y) = \begin{cases} p^{-\nu_p(x-y)} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

a) Montrer que d_p est une distance ultramétrique sur $\mathbb{Z}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{Z}$, déterminer les éléments de la boule fermée $\overline{B}(x, p^{-n})$ et de la boule ouverte $B(x, p^{-n})$.

c) Montrer que la suite de terme général $u_n = 6^n$ converge vers 0 dans $(\mathbb{Z}, d_2)$ mais diverge dans $(\mathbb{Z}, d_5)$.

Exercice 9 On considère l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

1) Soit $C = [0,1] \times [0,1]$. L'ensemble $\mathbb{Q}^2 \cap C$ est-il dense dans C ?

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre fixé et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \lambda x\}$. L'ensemble $\mathbb{Q}^2 \cap D$ est-il dense dans D ?

3) Déterminer les valeurs d'adhérences des suites suivantes (α est un réel fixé) :

a) $u_n = (n, (-1)^n)$ b) $u_n = ((-1)^n, (-1)^{n+1})$

c) $u_n = (1/n, \cos(n\alpha))$ d) $u_n = (\cos(n\alpha), \sin(n\alpha))$

Exercice 10 (Topologie de la convergence simple : non métrisable) Soit E l'espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Si $f \in E$, $N \in \mathbb{N}^*$, $x = (x_1, \ldots, x_N) \in [0,1]^N$, et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N) \in (\mathbb{R}_+^*)^N$, on définit

$$V_{f,x,\varepsilon} = \{g \in E \mid \forall i \in \{1, \cdots, N\}, |f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon_i\}$$

On définit $\mathcal{O}$ comme l'ensemble des réunions d'ensembles précédents.

1) Montrer que $\mathcal{O}$ définit une topologie sur E.

2) Montrer qu'une suite de fonctions de E est convergente pour cette topologie si et seulement si elle converge simplement.

3) Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de E nulles sauf en un nombre fini de points. Montrer que $\mathcal{D}$ est dense dans E.

4) En utilisant une fonction de E non nulle sur un ensemble non dénombrable, montrer que la topologie précédente n'est pas métrisable.

Exercice 11 (I) Déterminer toutes les normes sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}$.

Exercice 12 Soit $a, b > 0$. On pose, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x,y) = \sqrt{(x/a)^2 + (y/b)^2}$.

1) Prouver que N est une norme.

2) Dessiner la boule de centre 0 et de rayon 1.

3) Déterminer les meilleures constantes $c_2 \geq c_1 > 0$ telles $c_1\|.\|_2 \leq N \leq c_2\|.\|_2$.

Exercice 13 (I) Soit E un espace vectoriel réel, et d une distance sur E. Montrer que d provient d'une norme sur E si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(i) (invariance par translation) pour tous $x, y, z \in E$, $d(x+z, y+z) = d(x, y)$;

(ii) (action des dilatations) pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

Exercice 14 (I) Les distances des exercices 2, 5 et 7 sont-elles associées à des normes ?

Exercice 15 (Comparaison de normes sur $\mathbb{R}^2$) (I) Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $p > 0$, on pose :

$$N_p(x) = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad N_\infty(x) = \max(|x_1|, |x_2|)$$

1) Montrer que, pour tout $p \geq 1$, N_p est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Montrer que N_∞ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Montrer que si $p < 1$, N_p n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2) Si $a \in \mathbb{R}$, $a \leq 1$, vérifier que $p \mapsto (1 + a^p)^{1/p}$ est décroissante. En déduire que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^2$, l'application $p \mapsto N_p(x)$ est décroissante et que $N_p(x) \to N_\infty(x)$ quand $p \to +\infty$.

3) Pour $0 < p < q < +\infty$, montrer que $N_q \leq N_p \leq 2^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} N_q$ (on pourra commencer par montrer que $p \mapsto \varphi(p) = \ln(1 + a^p)$ est convexe, et on exploitera la croissance de $p \mapsto \tau_{[0,p]}\varphi$).

Exercice 16 (Maximum de valeurs absolues de formes linéaires) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit Φ un ensemble fini de formes linéaires sur E, qui engendre $E^* = L(E, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in E$, on note

$$N(x) = \max\{|\varphi(x)| \ ; \ \varphi \in \Phi\}.$$

1) Montrer que N est une norme sur E.

2) Montrer que les normes $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||_1$ habituelles sur $\mathbb{R}^d$ sont de la forme ci-dessus.

3) On prend $E = \mathbb{R}^2$, muni du produit scalaire canonique et $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, où φ_1 et φ_2 sont définies par

$$\varphi_1(x_1, x_2) = x_1 + (1/2)x_2 \text{ et } \varphi_2(x_1, x_2) = (1/2)x_1 - x_2.$$

Dessiner la boule unité associée à la norme N.

4) Soit $||\cdot||$ la norme euclidienne associée à un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, et S la sphère unité. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$||x|| = \sup\{|(s|x)| \ ; s \in S\}.$$

Exercice 17 Soit N l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $(x, y) \mapsto \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}$.

1) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) \leq N_2(x, y)$ où N_2 est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

3) Montrer que les deux normes N et N_2 sont équivalentes.

Exercice 18 (L'identité du parallélogramme caractérise les espaces euclidiens) (I) Soit (E, N) un espace vectoriel normé réel vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ N^2(x+y) + N^2(x-y) = 2N^2(x) + 2N^2(y).$$

Le but de l'exercice est de montrer que N provient d'un produit scalaire. Pour cela, on pose

$$\forall (x, y) \in E^2, \ b(x, y) = \frac{1}{4}[N^2(x+y) - N^2(x-y)].$$

1) Montrer que pour tout x et y dans E, $b(x,y) = b(y,x)$.

2) Montrer que pour tout $x \in E$, $b(x,x) = 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.

3) Montrer que pour tout $(x,y,z) \in E^3$, $b(x+y,z) + b(x-y,z) = 2b(x,z)$.

4) Montrer que pour tout $(x,z) \in E^2$, $b(2x,z) = 2b(x,z)$.

5) Montrer que pour tout $(x,y,z) \in E^3$, $b(x+y,z) = b(x,z) + b(y,z)$.

6) Soit $(x,z) \in E^2$. Montrer l'égalité $b(\lambda x, z) = \lambda b(x,z)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$, puis pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$, puis pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

7) Conclure.

Exercice 19 (Distance à une partie dans un espace vectoriel normé) **(I)** Soit (E,N) un espace vectoriel normé de dimension finie, S la sphère unité , C une partie convexe de E, F un fermé de E et $x \in E$.

1) Montrer que la distance $d(x,S)$ est atteinte en au moins un point de S, exprimer cette distance en fonction de $N(x)$ et montrer qu'il n'y a pas toujours unicité.

2) Montrer que si la norme N provient d'un produit scalaire, la distance $d(x,C)$ est atteinte en au plus un point.

3) Montrer que si $x \notin F$, alors $d(x,F) > 0$.

Exercice 20 **(I)** Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, on définit, pour toute matrice réelle $n \times n$ A,

$$|||A||| = \mathrm{Sup}_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur l'espace des matrices réelles $n \times n$, qui vérifie de plus, pour toutes telles matrices A et B : $|||AB||| \leq |||A|||\ |||B|||$.

Exercice 21 (Inégalité de Hölder) **(I)** On fixe dans ce qui suit un réel $p > 1$, et on note p' l'unique réel tel que $1/p + 1/p' = 1$ (on a aussi $p' > 1$).

1) En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, montrer que pour tous $a, b \geq 0$, on a

$$ab \leq a^p/p + b^{p'}/p'$$

2) Inégalité de Hölder. Lorsque $x, y \in \mathbb{R}^n$, montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^{p'}\right)^{1/p'},$$

avec égalité seulement si x et y sont colinéaires (on pourra utiliser la question précédente avec $a = |x_k|/(\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$, $b = |y_k|/(\sum_{k=1}^n |y_k|^{p'})^{\frac{1}{p'}}$).

3) En déduire l'inégalité de Minkowski : pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p}.$$

En déduire que l'application $x \mapsto (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

4) Procéder de même en remplaçant $\mathbb{R}^n$ par l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles (et les sommes, par des intégrales).

Exercice 22 (I) Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $N_g(f) = \|gf\|_\infty$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme sur E.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à la norme infinie.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que (E, N_g) soit un espace vectoriel normé complet.

Indication : lorsque g s'annule, construire une série $\sum u_n$ de fonctions $u_n \geq 0$ sur $[0,1]$ telle que $u_n(x_0) = 1$ pour un certain point $x_0 \in [0,1]$ et $\sum N_g(u_n) < +\infty$.

Exercice 23 (I)

1) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et N_1, N_2 des normes sur E. Montrer que N_1 et N_2 induisent la même topologie sur E si et seulement si elles sont équivalentes.

2) Est-ce le cas pour des distances ? i.e. si d_1 et d_2 sont deux distances sur un ensemble X induisant la même topologie, existe-t-il $C > 0$ tel que $C^{-1}d_1 \leq d_2 \leq Cd_1$?

Exercice 24 (Jauge d'un convexe (CC 18-19)) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu'une partie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est :

$$\textbf{convexe} \text{ si pour tout } (x,y) \in A^2, \text{ et pour tout } t \in [0,1],\ tx + (1-t)y \in A; \qquad \text{(Conv)}$$

$$\textbf{symétrique par rapport à l'origine} \text{ si pour tout } x \in A,\ -x \in A. \qquad (\mathrm{Sym}_0)$$

1) Si N est une norme sur $\mathbb{R}^n$, justifier que la boule unité fermée de $(\mathbb{R}^n, N)$ est un compact convexe, symétrique par rapport à l'origine et d'intérieur non vide.

2) Dessiner les boules unités fermées pour la norme $\|\cdot\|_1$, la norme $\|\cdot\|_2$ et la norme $\|\cdot\|_\infty$. On prendra soin de bien indiquer quelle boule correspond à quelle norme.

On munit maintenant $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$ qu'il ne sera pas nécessaire de préciser. On se donne K un convexe de $\mathbb{R}^n$ qui est compact, symétrique par rapport à l'origine et d'intérieur non vide. On se propose de montrer qu'il correspond à la boule unité fermée d'une norme de $\mathbb{R}^n$.

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$I_x = \{\lambda \geq 0 : \lambda x \in K\},$$

et on définit $J\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$J(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sup I_x} & \text{si } I_x \text{ est borné,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On admet, dans un premier temps que $0 \in \mathring{K}$.

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble I_x est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

4) Montrer que si I_x est borné, $\sup I_x > 0$. En déduire que J est bien définie.

5) Montrer que $J(0) = 0$.

6) Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

a) Montrer que I_x est borné et en déduire que $J(x) > 0$.

b) En utilisant la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, montrer que $\sup I_x$ est atteint.

c) Montrer que $J(-x) = J(x)$.

d) Pour $\alpha > 0$, déterminer $I_{\alpha x}$ en fonction de I_x et en déduire que $J(\alpha x) = \alpha J(x)$.

7) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $x_0 \in K$ tel que $x = J(x)x_0$.

8) Soient $x_0, y_0 \in K$ et soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $(ax_0 + by_0)/(a + b) \in K$.

9) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ avec $(x, y) \neq (0, 0)$. On pose $a = J(x)$ et $b = J(y)$. Montrer que $1/(a+b) \in I_{x+y}$ et en déduire que $J(x+y) \leq J(x) + J(y)$.

10) Conclusion :

a) Montrer que J définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que K est la boule unité fermée de la norme J.

11) Montrer que l'hypothèse $0 \in \overset{\circ}{K}$ se déduit en fait des hypothèses initiales ((Conv), (Sym_0) et $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$).

Exercice 25 Soit E l'espace des suites réelles bornées muni de la norme $\|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

1) Montrer que l'ensemble A des suites qui convergent vers 0 est fermé dans E.

2) Soit B l'ensemble des suites qui sont nulles à partir d'un certain rang. Montrer que B est dense dans A. Est-il dense dans E ?