L3A Mathématiques — Université Grenoble Alpes

2020-2021

TD 1

Exercice 1 Soient E et F deux ensembles. Montrer que l'existence d'une injection de E dans F équivaut à l'existence d'une surjection de F dans E. Remarque : la preuve d'une des implications utilise l'axiome du choix.

Exercice 2 Pour X un ensemble quelconque on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses parties.

1) Est-ce qu'il existe une application injective de X dans $\mathcal{P}(X)$?
2) Est-ce qu'il existe une application surjective $f : X \to \mathcal{P}(X)$? [1]
3) Est-ce qu'il existe un ensemble X pour lequel X et $\mathcal{P}(X)$ sont équipotents ?

Exercice 3 (I) Montrer que l'ensemble $\{0,1\}^X$ des applications de X dans $\{0,1\}$ est équipotent à $\mathcal{P}(X)$.

Exercice 4 *

1) Soient A un ensemble et $S \subset A$ une partie telle qu'il existe une injection $u : A \to S$. On pose $C_0 = A \setminus S$, $C_n = u^n(C_0)$ et $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Montrer que les ensembles C_n sont 2 à 2 disjoints, et que l'application $f : A \to A$ telle que $f(x) = u(x)$ pour $x \in C$ et $f(x) = x$ pour $x \in A \setminus C$ est une bijection de A sur S.

2) Déduire de ce qui précède le théorème de Cantor-Bernstein :
Soient A et B deux ensembles. S'il existe une injection de A vers B et une injection de B vers A, alors A et B sont équipotents.

Exercice 5 *

1) Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$ et les intervalles $[0,1]$ et $]0,1[$ sont équipotents. On pourra utiliser le théorème de Cantor-Bernstein.
2) Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents. [2]
3) Soit $n \geq 1$ un entier. En déduire que $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents. [3]

Exercice 6 (I) Montrer que l'application $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n,m) = 2^n(2m+1) - 1$ est une bijection. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercice 7 * Montrer que si A n'est pas dénombrable et $B \subset A$ est dénombrable, alors A et $A \setminus B$ sont équipotents. En déduire que les nombres réels et les irrationnels sont en bijection.

Exercice 8 (Points de discontinuité des fonction monotones) (I) Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, f admet une limite à gauche, notée $f(x-)$, et une limite à droite, notée $f(x+)$.

2) En déduire que si $f(\mathbb{R})$ est un intervalle, f est continue. Soit $[a,b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$.

---

1. Indice : raisonner pas l'absurde, et considérer le sous-ensemble $E = \{x \in X : x \notin f(x)\}$.
2. Indice : utiliser d'abord le fait que $\mathbb{R}$ est équipotent à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
3. Indice : toute fonction de $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ est déterminée par sa valeur aux points rationnels.

3) Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i+) - f(x_i-) \leq f(b) - f(a).$$
4) Montrer que l'ensemble des points de $[a, b]$ où f est discontinue est au plus dénombrable.[4]
5) En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f sur $\mathbb{R}$ est dénombrable.

Exercice 9 (Opérations ensemblistes) (I)
1) Soient I, J des ensembles et $(A_{i,j})_{i,j \in I \times J}$ des parties d'un ensemble X. Montrer que :
$$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} \subset \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} A_{i,j} = \bigcup_{f : J \to I} \bigcap_{j \in J} A_{f(j),j}.$$
Donner un exemple ou l'inclusion est stricte.
2) En déduire qu'une intersection finie d'unions peut aussi s'écrire comme une union d'intersections finies.
3) Soient $(A_i)_{i \in I}$ des parties d'un ensemble X, montrer les égalités :
$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$
4) Montrer qu'une union finie d'intersections s'écrit aussi comme une intersection d'unions finies.
5) Soient X, Y des ensembles, $f : X \to Y$ une application, $(A_i)_{i \in I}$ des parties de X et $(B_j)_{j \in J}$ des parties de Y. Montrer :
$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i), \quad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i),$$
$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j).$$
Donner un exemple où l'inclusion ci-desssus est stricte. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que cette inclusion soit toujours une égalité.

Exercice 10 Déterminer toutes les topologies sur un ensemble à 3 éléments. Donner une base d'ouverts pour chacune et dire si elles sont séparées.

Exercice 11 (I) $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, -4\}, \{1, 2, 3, -4\}, \mathbb{Z}\}$ est elle une topologie sur $\mathbb{Z}$?

Exercice 12 (I) Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Quelles conditions doivent vérifier A et B pour que $\mathcal{O} = \{\emptyset, A, B, E\}$ soit une topologie sur E ?

Exercice 13 Soit X un ensemble. Sur l'ensemble $\overline{X} = X \cup \{\infty\}$ avec $\infty \notin X$, on définit $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\overline{X})$ comme la réunion de $\mathcal{P}(X)$ et des parties de la forme $\overline{X} \setminus F$ où F est une partie finie.
1) Montrer que $\mathcal{O}$ définit une topologie séparée sur $\overline{X}$, qui induit la topologie discrète sur X.
2) Dans le cas où $X = \mathbb{N}$ est muni de la topologie discrète, montrer que $\mathbb{N}$ et $\overline{\mathbb{N}}$ ne sont pas homéomorphes. Plus précisément, on montrera qu'il existe une bijection continue $\mathbb{N} \to \overline{\mathbb{N}}$, mais que toute application continue $\overline{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ est d'image finie.

4. Indice : on pourra commencer à regarder, pour n fixé, le nombre de points x tels que $f(x+) - f(x-) \geq 1/n$.

Exercice 14 (Topologie codénombrable) Soit X un ensemble et soit

$$\mathcal{O} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X \mid A^c \text{ est dénombrable}\}$$

1) Montrer que $\mathcal{O}$ est une topologie sur X.
2) Montrer que toute intersection denombrable d'ouverts est un ouvert.
3) Montrer que toute suite convergente de $(X, \mathcal{O})$ est stationnaire.

On suppose maintenant que X n'est pas dénombrable.

4) Montrer que, si X n'est pas dénombrable, l'intersection de deux ouverts non vides est non vide.
5) Est-ce que l'espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est séparé ?
6) Est-ce que l'espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est séparable ?

Exercice 15 Dans $\mathbb{R}^2$, on note $\mathcal{B}$ l'ensemble des disques ouverts dont le centre appartient à $\mathbb{Z}^2$ et dont le rayon appartient à $\mathbb{N}$. Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des réunions d'éléments de $\mathcal{B}$. $\mathcal{O}$ est-elle une topologie sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 16 Soit X un ensemble, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de topologie sur X si et seulement si les propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.
(ii) $\forall (B, B') \in \mathcal{B}^2, \forall x \in B \cap B', \exists B'' \in \mathcal{B}, x \in B'' \subset B \cap B'$.

Exercice 17

1) Montrer qu'un espace topologique qui possède une base dénombrable d'ouverts est séparable.
2) Montrer que tout espace métrique séparable possède une base dénombrable d'ouverts. Est-ce vrai pour un espace topologique ? [5]

Exercice 18

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue surjective.

1) Est-ce que si X est séparable, Y l'est aussi ?
2) Est-ce que si X admet une base dénombrable d'ouverts, Y aussi ? * [6]
3) Dans le cas d'une réponse négative à l'une des questions précédentes, est-ce que la réponse reste inchangée si maintenant X et/ou Y est(sont) supposé(s) être des espaces métriques ?

Exercice 19

1) Soit (E, d) un espace métrique séparable. Montrer que toute partie de E muni de la topologie induite est séparable.

Soit $\mathcal{B}$ la famille des rectangles semi-ouverts de $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$[a, b[\times [c, d[$$

2) Montrer que $\mathcal{B}$ est la base d'une topologie τ sur $\mathbb{R}^2$.
3) Montrer que la topologie induite τ_D sur la droite

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$$

est la topologie discrète.

4) Montrer que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ est séparable mais que (D, τ_D) ne l'est pas.

5. Indice : on pourra regarder l'Exercice 19.
6. Indice : on pourra considérer $X = \bigcup_{k \geq 0} [2k, 2k+1]$ muni de la topologie induite de $\mathbb{R}$, $Y = X/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence qui identifie les entiers pairs et f l'application quotient.

Exercice 20 **(I)** Soit E un espace topologique, et A, B des parties de E. Comparer les paires d'ensembles suivants. Lorsqu'il n'y a pas égalité, donner un contre-exemple.

1) $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.
2) $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.
3) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$ et $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.
4) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$ et $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
5) $\partial(A \cup B)$ et $\partial A \cup \partial B$.
6) $\partial(A \cap B)$ et $\partial A \cup \partial B$.

Exercice 21 Soit E un espace topologique. Soit A une partie de E. Exprimer plus simplement les parties

$$\overline{\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}} \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}}.$$

Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que les parties A, $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, $\overline{\overset{\circ}{A}}$, $\overset{\circ}{\overline{A}}$, $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}$, $\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$ soient toutes différentes.

Exercice 22 **(I)** Soit A une partie d'un espace topologique. On note $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

1) Montrer que si A est ouvert, alors ∂A est d'intérieur vide ; ce résultat reste-t-il vrai avec A fermé ? Avec A quelconque ?

2) Montrer que : A ouvert $\Longleftrightarrow A \cap \partial(A) = \emptyset$.

3) Montrer que : A fermé $\Longleftrightarrow \partial A \subset A$.

4) Montrer que : A ouvert et fermé $\Longleftrightarrow \partial A = \emptyset$.

5) Montrer que $\partial(\overline{A}) \subset \partial A$ et $\partial(\overset{\circ}{A}) \subset \partial A$. Donner un exemple dans $\mathbb{R}$ où ces trois ensembles sont distincts.

Exercice 23 **(I)** Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière des parties suivantes de $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle.

$$A =]-\infty, 1[\cup]1, 2] \cup \{3\} \qquad B = \mathbb{Z} \qquad C = \mathbb{Q}$$
$$D = \left\{(-1)^k + 2^k : k \in \mathbb{Z}\right\} \qquad E = \{p^{-1} + q^{-1} : (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$$

Même question dans $\mathbb{R}^2$ avec $A =]-\infty, -1] \times \{0\} \cup [-1, 1[\times [-1, 1[$.

Exercice 24 **(I)** On munit $\mathbb{R}^2$ de sa topologie usuelle. Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$A = \{(x, y) \mid x > 0, y \geq 0, xy < 1\} \cup \{(0, 0)\}.$$

1) Est-ce une partie ouverte, fermée dans $\mathbb{R}^2$? Déterminer $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, ∂A.

2) On munit A de la distance induite. Indiquer si les parties suivantes sont ouvertes ou fermées dans A et dans $\mathbb{R}^2$:

$$B =]0, +\infty[\times \{0\} \qquad C = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, xy < 1\}$$
$$D = \{(x, y) \mid x > 0, y \geq 0, xy < 1/2\}$$

Exercice 25 Soit X un espace topologique, Y un sous-espace de X muni de la topologie induite et A une partie de Y.

1) On note $\overline{A}$ l'adhérence de A dans X et $\overline{A}^Y$ l'adhérence de A dans Y. Comparer $\overline{A}^Y$ et $\overline{A} \cap Y$.

2) On note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A dans X et $\overset{\circ}{A}^Y$ l'intérieur de A dans Y. Comparer $\overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{A}^Y$.